国語，数学Ⅲ　問題

はじめに，これを読みなさい。

1. この冊子には，「数学Ⅲ」と「国語」の問題がおさめられている。「数学Ⅲ」は表面から10ページ，「国語」は裏面から21ページである。必要な科目を選択して解答すること。なお，表紙の次の白紙2ページはメモ用紙として使用してもよい。
2. 解答用紙に印刷されている受験番号が正しいかどうか，受験票と照合して確認すること。
3. 監督者の指示にしたがい，解答用紙の氏名欄に氏名を記入すること。
4. 解答用紙の**「解答科目マーク欄」にマーク**し，**「解答科目名記入欄」に解答する科目名を記入**すること。マークされていない場合，または複数の科目にマークされている場合は，この時限の科目は採点対象外となる。
5. 解答は，すべて解答用紙の所定欄にマークすること。
6. 1つの解答欄に2つ以上マークしないこと。
7. 解答は，必ず鉛筆またはシャープペンシル(いずれもHB・黒)で記入のこと。
8. 訂正する場合は，消しゴムできれいに消し，消しくずを残さないこと。
9. 解答用紙は，絶対に汚したり折り曲げたりしないこと。
10. **解答用紙はすべて回収する**ので，持ち帰らず，**必ず提出する**こと。
11. 問題冊子は，必ず持ち帰ること。
12. 試験時間は，60分である。
13. (数学Ⅲ)　分数形で解答する場合は，既約分数で答えること。
14. (数学Ⅲ)　根号を含む形で解答する場合は，根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えること。
15. マーク記入例

良い例	悪　い　例
	

数学Ⅲ　問題

〔Ⅰ〕 次の空欄に当てはまる0から9までの数字を解答用紙の所定の欄にマークせよ。ただし，空欄 $\boxed{\text{エオ}}$ は2桁の数を表す。

関数 $f(x), g(x)$ を

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = \sin\frac{\pi x}{2}$$

と定める。$0 \leqq x \leqq \boxed{\text{ア}}$ のとき $f(x) \leqq g(x)$ であり，$\boxed{\text{ア}} \leqq x$ のとき $f(x) \geqq g(x)$ である。

次に，関数 $F(x)$ を

$$F(x) = \frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2}$$

と定める。このとき，$F(x) = 0$ となる最小の正の数 x は $\boxed{\text{イ}}$ である。また，区間 $0 \leqq x \leqq \boxed{\text{イ}}$ において，曲線 $y = F(x)$ と x 軸で囲まれた図形を，x 軸の周りに1回転させてできる立体の体積は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エオ}}}\pi$ である。

（このページは計算用紙として使用してよい。）

〔Ⅱ〕 次の空欄 $\boxed{ア}$, $\boxed{ウ}$, $\boxed{エ}$, $\boxed{オ}$, $\boxed{カ}$, $\boxed{キ}$, $\boxed{ク}$, $\boxed{ケ}$ に当てはまるものをそれぞれ指定された解答群の中から選び，解答用紙の所定の欄の番号をマークせよ。なお，解答群から同じものを2回以上選んでもよい。また，それ以外の空欄に当てはまる0から9までの数字を解答用紙の所定の欄にマークせよ。

以下，i は虚数単位とする。

複素数 z_1, z_2, z_3 が表す複素数平面上の点すべてを通る直線があるとき，z_1, z_2, z_3 は一直線上にあるという。$z_1 = z_2$ のときは，明らかに z_1, z_2, z_3 は一直線上にある。$z_1 \neq z_2$ のときは，z_1, z_2, z_3 が一直線上にあることと $\dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$ が $\boxed{ア}$ であることは同値である。

x と y を実数とし，$z = x + yi$ とおく。このとき，$1, z, z^4$ が一直線上にあることと，x と y が次の (1) または (2) を満たすことは同値である。

$$y = \boxed{イ} \qquad \cdots\cdots (1)$$

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + 1 = 0 \qquad \cdots\cdots (2)$$

ただし，$A = \boxed{ウ}$ ，$B = \boxed{エ}$ ，$C = \boxed{オ}$ ，$D = \boxed{カ}$ ，$E = \boxed{キ}$ である。したがって，(x, y)を座標平面上の点と考えたとき，(1) の表す図形は $\boxed{ク}$ であり，(2) の表す図形は $\boxed{ケ}$ である。ここで，点(x, y)が (2) の表す図形上を動くとき，$|y|$ の最小値は，$\dfrac{\sqrt{\boxed{コ}}}{\boxed{サ}}$ になる。

アの解答群

⓪ 0	① π	② $-\pi$	③ i	④ $-i$
⑤ 純虚数	⑥ 自然数	⑦ 整数	⑧ 実数	⑨ 虚数

ウ，エ，オ，カ，キの解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4
⑤ 5	⑥ -1	⑦ -2	⑧ -3	⑨ -4

ク，ケの解答群

⓪　原点　　①　原点でない 1 点

②　異なる 2 点　　③　原点を通る直線

④　原点を通らない直線　　⑤　異なる 2 直線

⑥　円　　⑦　円でない楕円

⑧　放物線　　⑨　双曲線

〔III〕 次の空欄 $\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$, $\boxed{\text{エ}}$, $\boxed{\text{オ}}$, $\boxed{\text{カ}}$ に当てはまるものをそれぞれ指定された解答群の中から選び，解答用紙の所定の欄の番号をマークせよ。なお，解答群から同じものを2回以上選んでもよい。それ以外の空欄には，当てはまる0から9までの数字を解答用紙の所定の欄にマークせよ。

以下，log は自然対数であり，e はその底とする。

$x > 0$ で定義された関数 $f(x) = \dfrac{\log x}{x^2}$ は，$x = \boxed{\text{ア}}$ で最大値 $\boxed{\text{イ}}$ をとる。また，$f(x)$ の不定積分は，

$$\int f(x)\,dx = -\frac{\log x + \boxed{\text{ウ}}}{x} + C \quad (C\text{ は積分定数})$$

である。

$a > \boxed{\text{ア}}$ に対して，点 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$ における曲線 $y = f(x)$ の接線と x 軸との交点を $\mathrm{Q}(g(a),\ 0)$ とおく。また，曲線 $y = f(x)$ と x 軸および2直線 $x = a$，$x = g(a)$ で囲まれた図形の面積を S とする。$h(a) = \dfrac{g(a)}{a} - 1$ とおくと $g(a) = a(1 + h(a))$ となるので，

$$S = \frac{h(a)\left(\boxed{\text{エ}}\right) - \log(1 + h(a))}{a(1 + h(a))}$$

と表せる。また，点 $\mathrm{R}(a,\ 0)$ をとり，△PQR の面積を T とおくと，

$$T = \frac{h(a)\log a}{2a}$$

である。ところで，$g(a)$ を a で表すと $g(a) = a\left(1 + \dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\right)$ となるので

$$\lim_{a \to \infty} h(a) = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}} \text{ であり，}$$

$$\lim_{a \to \infty} \frac{S}{T} = \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$$

となることがわかる。

ア，イの解答群

⓪ $\dfrac{1}{2}$　① 1　② e　③ $\dfrac{1}{e}$　④ $\sqrt{e}$

⑤ $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$　⑥ $2e$　⑦ $\dfrac{1}{2e}$　⑧ $\dfrac{e}{2}$　⑨ $\dfrac{2}{e}$

エ，オ，カの解答群

⓪ a　① 1　② $\log a$

③ $a \log a$　④ $\log a - 1$　⑤ $\log a + 1$

⑥ $2 \log a - 1$　⑦ $2 \log a + 1$　⑧ $3 \log a - 1$

⑨ $3 \log a + 1$

〔Ⅳ〕 次の空欄 $\boxed{\text{イ}}$ ， $\boxed{\text{ウ}}$ ， $\boxed{\text{オ}}$ ， $\boxed{\text{カ}}$ ， $\boxed{\text{ク}}$ ， $\boxed{\text{ケ}}$ に当てはまるものをそれぞれ指定された解答群の中から選び，解答用紙の所定の欄の番号をマークせよ。なお，解答群から同じものを２回以上選んでもよい。それ以外の空欄には，当てはまる０から９までの数字を解答用紙の所定の欄にマークせよ。

座標平面において，媒介変数表示

$$x = \theta - \sin\theta, \quad y = 1 - \cos\theta \qquad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

で表されるサイクロイドを C とし，方程式 $\dfrac{(x-\pi)^2}{\pi^2} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ で表される楕円を E とする。x 座標が等しい C 上の点と E 上の点の y 座標を比較するために，x 座標が $\theta - \sin\theta$ である E 上の点の y 座標の２乗を $f(\theta)$ とし，$g(\theta) = (1-\cos\theta)^2 - f(\theta)$ とする。

関数 $g(\theta)$ の区間 $0 \leqq \theta \leqq \pi$ における増減を調べる。

$g(0) = 0$，$g(\pi) = \boxed{\text{ア}}$ である。$0 < \theta < \pi$ に対して

$$h(\theta) = \frac{\pi^2 g'(\theta)}{2(1-\cos\theta)}$$

とすると，$h(\theta) = \left(\boxed{\text{イ}}\right)\sin\theta + 4\left(\boxed{\text{ウ}}\right)$ となる。$h(\theta)$ の導関数を求めると，$0 < \alpha < \pi$ かつ $h'(\alpha) = 0$ を満たす α がただ１つ存在して，

$\cos\alpha = \dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ となることがわかる。また，$\displaystyle\lim_{\theta\to+0} h(\theta) = \boxed{\text{カ}}$，

$\displaystyle\lim_{\theta\to\pi-0} h(\theta) = \boxed{\text{キ}}$ であるので，$0 < \beta < \alpha$ かつ $h(\beta) = 0$ を満たす β がただ１つ存在することもわかる。したがって，関数 $g(\theta)$ は $\boxed{\text{ク}}$ 。

以上の考察と $g(\theta) = g(2\pi - \theta)$ であることから，$0 < \theta < 2\pi$ に対して C 上の点 $(\theta - \sin\theta,\ 1-\cos\theta)$ は楕円 E で囲まれた部分（ただし，境界線を含む）に $\boxed{\text{ケ}}$ ことがわかる。

イ，ウ，オ，カの解答群

⓪ π　① $-\pi$　② 4π　③ -4π　④ $\theta - \pi$

⑤ $\pi - \theta$　⑥ $\pi - 2$　⑦ $2 - \pi$　⑧ $\pi^2 - 4$　⑨ $4 - \pi^2$

クの解答群

⓪ 区間$[0, \pi]$で増加する　① 区間$[0, \pi]$で減少する

② 区間$[0, \alpha]$で増加し，区間$[\alpha, \pi]$で減少する

③ 区間$[0, \alpha]$で減少し，区間$[\alpha, \pi]$で増加する

④ 区間$[0, \beta]$で増加し，区間$[\beta, \pi]$で減少する

⑤ 区間$[0, \beta]$で減少し，区間$[\beta, \pi]$で増加する

ケの解答群

⓪ 属するときも属さないときもある

① つねに属する　② つねに属さない

(次のページに計算用紙があります。)

（このページは計算用紙として使用してよい。）

（このページは計算用紙として使用してよい。）