め

国　語，数学Ⅲ・数学C　問題

はじめに，これを読みなさい。

1. 解答用紙には，あなたの受験番号が印刷されています。受験番号が正しいかどうか，受験票と照合して確認し，氏名を記入しなさい。
2. 「国語」の問題は裏面から始まります。
3. この問題冊子は，「数学Ⅲ・数学C」については表面から10ページ，「国語」については裏面から18ページあります(表紙の次の白紙2ページはメモ用紙として使用してかまいません)。必要な科目を選択して解答しなさい。
4. 解答用紙の「解答科目マーク欄」にマークし，「解答科目名記入欄」に解答する科目名を記入しなさい。マークされていない場合，又は複数の科目にマークされている場合は，この時限は採点対象外となります。
5. 解答は，すべて解答用紙の解答欄にマークしなさい。
6. 1つの解答欄に2つ以上マークしてはいけません。
7. 解答は，必ず鉛筆又はシャープペンシル(いずれもHB・黒)で記入しなさい。
8. 訂正する場合は，消しゴムできれいに消し，消しくずを残さないようにしなさい。
9. 解答用紙は，絶対に汚したり折り曲げたりしてはいけません。
10. 解答用紙は持ち帰らないで，必ず提出しなさい。
11. この問題冊子は必ず持ち帰りなさい。
12. 試験時間は60分です。
13. (数学Ⅲ・数学C)　分数形で解答する場合は，既約分数で答えなさい。
14. (数学Ⅲ・数学C)　根号を含む形で解答する場合は，根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。
15. マーク記入例

良い例	悪　い　例

（このページは計算用紙として使用してよい）

（このページは計算用紙として使用してよい）

数学Ⅲ・数学C　問題

〔Ⅰ〕 次の空欄に当てはまる0から9までの数字を解答用紙の所定の欄にマークせよ。

(1) 大小2つのサイコロを振って出た目がそれぞれm, nのとき，行列$A(m,n)$を

$$A(m,n)=\frac{1}{\sqrt{m^2+n^2}}\begin{pmatrix} m & -n \\ n & m \end{pmatrix}$$

と定める。$A(m,n)$は原点を中心とする回転移動を表す行列である。この回転移動の回転角を$\theta(m,n)$とする。ただし，$0<\theta(m,n)<\dfrac{\pi}{2}$とする。このとき，$A(m,n)$と$A(n,m)$の積は

$$A(m,n)A(n,m)=\begin{pmatrix} \boxed{\text{ア}} & -\boxed{\text{イ}} \\ \boxed{\text{ウ}} & \boxed{\text{エ}} \end{pmatrix}$$

である。すべての目の出方に対する$\theta(m,n)$の和は$\boxed{\text{オ}}\,\pi$である。

（このページは計算用紙として使用してよい）

(2) 関数$f(x)$を$f(x) = e^{-x}\sin\sqrt{3}x$ （$x \geqq 0$）と定義する。

$f(x)$が極大値をとるxの値を小さい方から順にx_1，x_2，x_3，… とおくと，n番目は

$$x_n = \frac{\sqrt{\boxed{\text{カ}}}}{\boxed{\text{キ}}}\pi + \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}\,(n-1)\pi$$

であり，

$$f(x_n) = \frac{\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}}e^{-x_n}$$

となる。

このとき，第n項が$f(x_n)$である無限級数の和は

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n) = \frac{\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}}\,\frac{e^a}{e^b - 1}$$

となる。ここで

$$a = \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}\,\pi,\quad b = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}\,\pi$$

である。

（このページは計算用紙として使用してよい）

〔Ⅱ〕 次の空欄に当てはまる0から9までの数字を解答用紙の所定の欄にマークせよ。

3つの曲線

$$C_1 : y = \cos\frac{x}{2},\ C_2 : y = \tan x,\ C_3 : y = \sin x \quad \left(0 \leqq x < \frac{\pi}{2}\right)$$

によって囲まれた部分の面積 S を求めたい。

まず，$0 \leqq x < \frac{\pi}{2}$ の範囲において $\tan x - \sin x \geqq 0$ であり，$\tan x = \sin x$ となるのは $x = \boxed{\text{ア}}$ のときのみであることに注意しよう。

曲線 C_1 と C_2 の交点の x 座標を α とおくと，

$$2\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\boxed{\text{イ}}} - \boxed{\text{ウ}}$$

である。よって，

$$\cos\alpha = \sqrt{\boxed{\text{エ}}} - \boxed{\text{オ}}$$

となる。

また，曲線 C_1 と C_3 の交点の x 座標は $\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\pi$ である。

以上より

$$S = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}} - \sqrt{\boxed{\text{コ}}} - \log\left(\sqrt{\boxed{\text{サ}}} - \boxed{\text{シ}}\right)$$

を得る。ただし，log は自然対数を表す。

（このページは計算用紙として使用してよい）

〔Ⅲ〕 次の空欄**ア**，**エ**，**ク**，**ケ**，**サ**，**シ**に当てはまるものをそれぞれ指定された解答群の中から選び，解答用紙の所定の欄の記号をマークせよ。それ以外の空欄には，当てはまる0から9までの数字を解答用紙の所定の欄にマークせよ。ただし，解答群から同じものを二回以上選んでもよい。

なお，log は自然対数を表す。

(1) 不定積分 $\int \sqrt{x^2+1}\,dx$ を求めたい。$x = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$ とおくと $e^t = \boxed{\text{ア}}$ である。この置換により不定積分を求めると

$$\int \sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\int\left(\boxed{\text{エ}} + \boxed{\text{オ}}\right)dt$$

$$= \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\left\{\boxed{\text{ク}} + \log\left(\boxed{\text{ケ}}\right)\right\} + C$$

である。ただし，C は積分定数とする。

(2) 座標平面上の2点$(1,\ 0)$と$(-1,\ 0)$からの距離の積が2である点の軌跡を L とする。点$(x,\ y)$が L 上にあるための条件は

$$y^2 = \boxed{\text{コ}}\,\boxed{\text{サ}} - \left(\boxed{\text{シ}}\right)$$

である。$y^2 \geqq 0$ より x のとり得る値の範囲は

$$-\sqrt{\boxed{\text{ス}}} \leqq x \leqq \sqrt{\boxed{\text{ス}}}$$

である。

(3) 座標空間内の2点$(1,\ 0,\ 0)$と$(-1,\ 0,\ 0)$からの距離の積が2以下である点からなる部分を X とする。立体 X の体積を V とすると

$$V = \boxed{\text{セ}}\,\pi \log\left(\boxed{\text{ソ}} + \sqrt{\boxed{\text{タ}}}\right)$$

である。

ア，エ，ク，ケ，サ，シの解答群

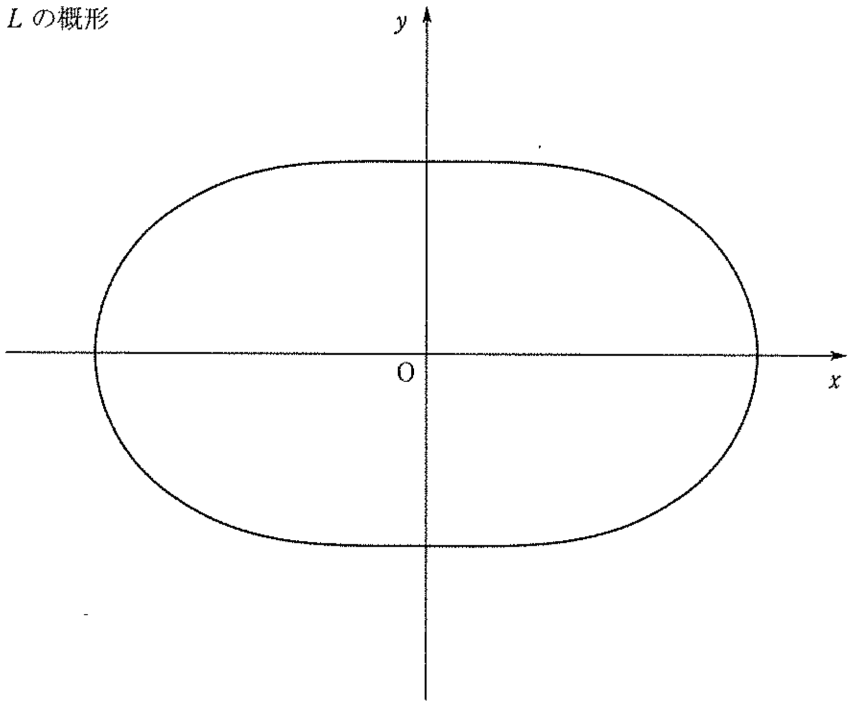
⓪ $\sqrt{x^2+1}$　　① $x\sqrt{x^2+1}$　　② $\sqrt{x^2+1}+x$

③ $x-\sqrt{x^2+1}$　　④ $\sqrt{x^2+1}-x$　　⑤ x^2+1

⑥ e^t+e^{-t}　　⑦ e^t-e^{-t}　　⑧ $e^{2t}+e^{-2t}$

⑨ $e^{2t}-e^{-2t}$

L の概形



〔Ⅳ〕 次の空欄キ，ケ，サ，ス，セ，ソ，タに当てはまる0から9までの数字を解答用紙の所定の欄にマークせよ。それ以外の空欄には，当てはまるものをそれぞれ指定された解答群の中から選び，解答用紙の所定の欄の記号をマークせよ。

(1) 関数$g(x)$は$x \geqq 0$で連続であるとし，$t \geqq 0$において$G(t) = \int_0^t g(x)\,dx$とおき，さらに$h(t) = t^2 G(t^3)$とおく。このとき

$$h'(t) = \boxed{\text{ア}} \int_0^{t^3} g(x)\,dx + \boxed{\text{イ}}\, g\left(\boxed{\text{ウ}}\right)$$

である。

(2) 実数tは$0 < t < 1$を満たすとする。2つの楕円

$$C_1 : x^2 + \frac{y^2}{t^2} = 1,\quad C_2 : \frac{x^2}{t^2} + y^2 = 1$$

を考える。C_1の内部に含まれてC_2の内部に含まれない部分の面積を$f(t)$とおく。$0 < t < 1$における$f(t)$の最大値について考察したい。

C_1とC_2の第1象限における交点のx座標を$c(t)$とすると，

$c(t) = \dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$である。$C_1$の内部の面積は$\boxed{\text{カ}}$であることから，

$\boxed{\text{カ}}$から2つの楕円の内部の共通部分の面積を引くことにより

$$f(t) = \boxed{\text{カ}} - \left(\boxed{\text{キ}} \int_0^{c(t)} \boxed{\text{ク}}\,dx - \boxed{\text{ケ}}\boxed{\text{コ}}\right)$$

となる。これより$f'(t)$，$f''(t)$を順次計算すると$f''(t) = -\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$となる。

したがって，$f'(t)$は$0 < t < 1$において減少する連続関数であり，

$$\lim_{t \to +0} f'(t) = \boxed{\text{ス}}\,\pi,\quad \lim_{t \to 1-0} f'(t) = -\boxed{\text{セ}}$$

であるから，$f'(t) = 0$であるtがただ一つ存在する。そのtをt_0とおくとき，原点を中心とする半径1の円のx，$y \geqq 0$の部分とx軸および直線$x = c(t_0)$によって囲まれる部分の面積は$\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ソ}}}$であり，$f(t)$の最大値は

$f(t_0) = \boxed{\text{タ}}\boxed{\text{チ}}$である。

ア，イ，ウの解答群

⓪ t　① $2t$　② t^2　③ $2t^2$

④ $3t^2$　⑤ t^3　⑥ $2t^3$　⑦ $3t^3$

⑧ $2t^4$　⑨ $3t^4$

エ，オ，カ，シの解答群

⓪ πt　① πt^2　② $\sqrt{t}$　③ t

④ $t^{\frac{3}{2}}$　⑤ t^2　⑥ $\sqrt{t^2+1}$　⑦ t^2+1

⑧ $(t^2+1)^{\frac{3}{2}}$　⑨ $(t^2+1)^2$

ク，コ，チの解答群

⓪ $\sqrt{1-x^2}$　① $t\sqrt{1-x^2}$　② $\sqrt{t^2-x^2}$　③ $c(t)$

④ $c(t)^2$　⑤ t_0　⑥ t_0^2　⑦ $c(t_0)$

⑧ $c(t_0)^2$　⑨ $t_0c(t_0)$