明治大学
全学部統一入試
れ

国語，数学Ⅲ　問題

はじめに，これを読みなさい。

1. 解答用紙には，あなたの受験番号が印刷されています。受験番号が正しいかどうか，受験票と照合して確認し，氏名を記入しなさい。
2. 「国語」の問題は裏面から始まります。
3. この問題冊子は，「数学Ⅲ」については表面から10ページ，「国語」については裏面から20ページあります(表紙の次の白紙2ページはメモ用紙として使用してかまいません)。必要な科目を選択して解答しなさい。
4. 解答用紙の「解答科目マーク欄」にマークし，「解答科目名記入欄」に解答する科目名を記入しなさい。マークされていない場合，又は複数の科目にマークされている場合は，この時限の科目は採点対象外となります。
5. 解答は，すべて解答用紙の解答欄にマークしなさい。
6. 1つの解答欄に2つ以上マークしてはいけません。
7. 解答は，必ず鉛筆又はシャープペンシル(いずれもHB・黒)で記入しなさい。
8. 訂正する場合は，消しゴムできれいに消し，消しくずを残さないようにしなさい。
9. 解答用紙は，絶対に汚したり折り曲げたりしてはいけません。
10. 解答用紙は持ち帰らないで，必ず提出しなさい。
11. この問題冊子は必ず持ち帰りなさい。
12. 試験時間は60分です。
13. (数学Ⅲ)　分数形で解答する場合は，既約分数で答えなさい。
14. (数学Ⅲ)　根号を含む形で解答する場合は，根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。
15. マーク記入例

良い例	悪　い　例
	

（このページは計算用紙として使用してよい）

（このページは計算用紙として使用してよい）

数学Ⅲ　問題

〔Ⅰ〕 次の空欄 $\boxed{\text{オ}}$ に当てはまるものを解答群の中から選び，解答用紙の所定の欄の数字をマークせよ。それ以外の空欄には，当てはまる0から9までの数字を解答用紙の所定の欄にマークせよ。

(1) $x \neq 7$ とする。このとき，不等式

$$-x^2 - x + 20 > \frac{140}{7 - x}$$

を満たす x の値の範囲は，

$$-\boxed{\text{ア}} < x < \boxed{\text{イ}}, \quad \boxed{\text{ウ}} < x < \boxed{\text{エ}}$$

である。

（このページは計算用紙として使用してよい）

(2)　q を正の実数とするとき，

$$\lim_{s \to 1} \frac{q^s - q}{s - 1} = \boxed{\quad オ \quad}$$

である。

a，b，c を実数とする。$x > 0$ に対して，関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \left\{ n\left(x^{1+\frac{1}{n}} - x\right) - \frac{ax - 2b + x^{n+1} - cx^n}{4 + x^n} \right\}$$

と定義する。$f(x)$ が $x = 1$ で連続であるとき，

$$a - \boxed{\quad カ \quad}\, b + \boxed{\quad キ \quad}\, c = \boxed{\quad ク \quad}$$

となる。

オの解答群（ただし，log は自然対数，e はその底とする）

⓪　0	①　1	②　q	③　q^{-1}
④　e^q	⑤　e^{-q}	⑥　$\log q$	⑦　$-\log q$
⑧　$q \log q$	⑨　$-q \log q$		

（このページは計算用紙として使用してよい）

〔Ⅱ〕 次の空欄 $\boxed{\text{ア}}$ ， $\boxed{\text{イ}}$ ， $\boxed{\text{キ}}$ ， $\boxed{\text{ケ}}$ ， $\boxed{\text{コ}}$ に当てはまるものをそれぞれ指定された解答欄の中から選び，解答用紙の所定の欄の番号をマークせよ。なお，解答群から同じものを二回以上選んでもよい。それ以外の空欄には，当てはまる 0 から 9 までの数字を解答用紙の所定の欄にマークせよ。

i は虚数単位とし，α は 0 でない複素数とする。複素数平面上で実部と虚部が共に整数となる点を格子点と呼ぶことにする。

(1) 複素数平面上に 4 点 $\mathrm{O}(0)$，$\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\alpha+i\alpha)$，$\mathrm{C}(i\alpha)$ をとると，四角形 OABC は正方形になる。このとき，次が成立する。

(a) α の実部を a，虚部を b とおく。A が格子点であるとき，B は $\boxed{\text{ア}}$ 。

(b) $\alpha+i\alpha$ の実部を a，虚部を b とおく。B が格子点であるとき，A は $\boxed{\text{イ}}$ 。

(2) $\gamma=\cos\dfrac{2\pi}{5}+i\sin\dfrac{2\pi}{5}$ とおくと，$\overline{\gamma}=\gamma^{-1}=\cos\dfrac{2\pi}{5}-i\sin\dfrac{2\pi}{5}$ である。$\gamma^4+\gamma^3+\gamma^2+\gamma+1=\dfrac{\gamma^5-1}{\gamma-1}=\boxed{\text{ウ}}$ であることを用いれば，

$$\gamma+\gamma^{-1}=\frac{-\boxed{\text{エ}}+\sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{カ}}}$$ がわかる。

複素数平面上に 5 点 $\mathrm{O}(0)$，$\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\alpha+\gamma\alpha)$，$\mathrm{C}(\alpha+\gamma\alpha+\gamma^2\alpha)$，$\mathrm{D}\left(\boxed{\text{キ}}\right)$ をとると，五角形 OABCD は正五角形になる。

以下，α の実部を a，虚部を b とおく。A は格子点であるとする。このとき，$|\alpha+\gamma\alpha|^2=(a^2+b^2)\left(\gamma+\gamma^{-1}+\boxed{\text{ク}}\right)$ であるので，B は $\boxed{\text{ケ}}$ 。また，$\mathrm{OC}^2=\mathrm{OB}^2$ であるので，C は $\boxed{\text{コ}}$ 。

ア，イ，ケ，コの解答群

⓪ 必ず格子点になる

① a，b が共に偶数のときのみ格子点になる

② a，b が共に奇数のときのみ格子点になる

③ $a + b$ が偶数のときのみ格子点になる

④ $a + b$ が奇数のときのみ格子点になる

⑤ 格子点にはならない

キの解答群

⓪ $\gamma\alpha$　① $-\gamma\alpha$　② $\gamma^2\alpha$　③ $\gamma^3\alpha$

④ $\gamma^5\alpha$　⑤ $\gamma^{-1}\alpha$　⑥ $-\gamma^{-1}\alpha$　⑦ $-\gamma^{-2}\alpha$

⑧ $\alpha + \gamma^2\alpha$　⑨ $\alpha - \gamma^2\alpha$

〔Ⅲ〕 次の空欄に当てはまる0から9までの数字を，解答用紙の所定の欄にマークせよ。ただし，空欄 $\boxed{\text{サシ}}$ は2桁の数をあらわす。

(1) k を自然数とすると

$$\int_0^{\pi} \sin^k x \cos x \, dx = \boxed{\text{ア}}$$

である。

(2) 直線 $y = \sqrt{3}\,x$ を ℓ とし，曲線 $y = \sqrt{3}\,x + \sin^2 x$ を C とする。

直線 ℓ 上に点Aをとり，点Aにおいて直線 ℓ と直交する直線を L とする。関数 $y = \sqrt{3}\,x + \sin^2 x$ は x に関する単調増加関数であるので，直線 L と曲線 C の共有点は1点のみである。その共有点を $\mathrm{B}\left(t,\ \sqrt{3}\,t + \sin^2 t\right)$ とする。点Aと点Bの距離を h とおくと，

$$h = \frac{1}{\boxed{\text{イ}}} \sin^2 t$$

となる。また，原点Oと点Aの距離を p とする。点Aの x 座標が0以上であるときは

$$p = \boxed{\text{ウ}}\, t + \frac{\sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{\boxed{\text{オ}}} \sin^2 t$$

となる。この等式の右辺を $f(t)$ とおく。

$0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲で曲線 C と直線 ℓ で囲まれた図形を考え，その図形を直線 ℓ の周りに1回転させてできる立体の体積を V とすると，$V = \pi \displaystyle\int_0^{\boxed{\text{カ}}\,\pi} h^2 \, dp$

となる。ここで，$p = f(t)$ とおいて置換積分すれば，

$$V = \frac{\pi}{\boxed{\text{キ}}} \int_0^{\pi} \sin^4 t \, dt$$

が成り立つ。$\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^4 t \, dt = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}} \pi$ より，$V = \dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サシ}}} \pi^2$ である。

（このページは計算用紙として使用してよい）

〔Ⅳ〕 次の空欄に当てはまるものを解答群の中から選び，解答用紙の所定の欄の数字をマークせよ。なお，解答群から同じものを二回以上選んでもよい。

以下では，log は自然対数，e はその底とする。

曲線 $y = \log x$ を C とする。p，q，t は実数であり，$e < p < q$ を満たすとする。座標平面上に，次の 6 点，O(0，0)，A(0，t)，P(p，0)，Q(q，0)，F(p，$\log p$)，G(q，$\log q$)をとる。点 G における C の接線と y 軸の交点を考え，その y 座標を t_1 とすると，$t_1 = \boxed{\text{ア}} - 1$ である。直線 FG と y 軸の交点の y 座標を t_2 とすると，

$$t_2 = \frac{\boxed{\text{イ}} - \boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

である。

$t > t_1$ のとき，曲線 C と 2 つの線分 AF，AG で囲まれた図形の面積を S とする。台形 OQGA の面積を U，台形 OPFA の面積を V とおくと，

$$\begin{aligned} S &= U - V - \int_p^q \log x\, dx \\ &= \frac{1}{2}\left\{(t+2)\left(\boxed{\text{オ}}\right) + \boxed{\text{カ}} - \boxed{\text{キ}}\right\} \end{aligned}$$

である。

次に，$t_2 < t < t_1$ と仮定する。曲線 C と直線 AG の 2 つの共有点のうち，G とは異なる点を T とする。曲線 C と 2 つの線分 AF，AT で囲まれた図形の面積を S_1 とする。曲線 C と線分 TG で囲まれた図形の面積を S_2 とする。このとき，$S_1 = S_2$ となるための必要十分条件は，

$$t = \frac{\boxed{\text{ク}} - \boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}} - 2$$

である。

アからコの解答群

⓪ p	① q	② $p + q$	③ $q - p$	④ $\log p$
⑤ $\log q$	⑥ $p \log p$	⑦ $q \log p$	⑧ $p \log q$	⑨ $q \log q$

（このページは計算用紙として使用してよい）