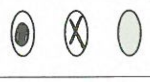
明治大学
全学部統一入試
て

国語，数学Ⅲ　問題

はじめに，これを読みなさい。

1. 解答用紙には，あなたの受験番号が印刷されています。受験番号が正しいかどうか，受験票と照合して確認し，氏名を記入しなさい。
2. 「国語」の問題は裏面から始まります。
3. この問題冊子は，「数学Ⅲ」については表面から8ページ，「国語」については裏面から18ページあります(表紙の次の白紙2ページはメモ用紙として使用してかまいません)。必要な科目を選択して解答しなさい。
4. 解答用紙の「解答科目マーク欄」にマークし，「解答科目名記入欄」に解答する科目名を記入しなさい。マークされていない場合，又は複数の科目にマークされている場合は，この時限の科目は採点対象外となります。
5. 解答は，すべて解答用紙の解答欄にマークしなさい。
6. 1つの解答欄に2つ以上マークしてはいけません。
7. 解答は，必ず鉛筆又はシャープペンシル(いずれもHB・黒)で記入しなさい。
8. 訂正する場合は，消しゴムできれいに消し，消しくずを残さないようにしなさい。
9. 解答用紙は，絶対に汚したり折り曲げたりしてはいけません。
10. 解答用紙は持ち帰らないで，必ず提出しなさい。
11. この問題冊子は必ず持ち帰りなさい。
12. 試験時間は60分です。
13. (数学Ⅲ)　分数形で解答する場合は，既約分数で答えなさい。
14. (数学Ⅲ)　根号を含む形で解答する場合は，根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。
15. マーク記入例

良い例	悪　い　例
	

（このページは計算用紙として使用してよい）

（このページは計算用紙として使用してよい）

数学Ⅲ　問題

〔Ⅰ〕 次の空欄**ア**から**キ**に当てはまるものを解答群の中から選び，解答用紙の所定の欄の数字をマークせよ。なお，一つの解答群から同じものを二回以上選んでもよい。空欄**ク**には，当てはまる0から9までの数字を解答用紙の所定の欄にマークせよ。

log は自然対数を表すものとする。

$t>0$とする。xy座標平面上の曲線 $xy=1+t$をCとし，直線$x+y=2+t$をℓとする。曲線Cと直線ℓは2点で交わり，その2つの交点のx座標はそれぞれ1と $\boxed{\text{ア}}$ である。曲線Cと直線ℓで囲まれた図形をAとし，その面積を$f(t)$とすると，

$$f(t)=\frac{t}{2}\left(\boxed{\text{イ}}\right)-\left(\boxed{\text{ウ}}\right)\log\left(\boxed{\text{エ}}\right)$$

である。

また，図形Aをx軸のまわりに1回転させてできる立体の体積を$g(t)$とすると，

$$g(t)=\frac{\boxed{\text{オ}}}{3}\pi$$

である。関数$f(t)$の第2次導関数は

$$f''(t)=\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$$

となるから

$$\lim_{t\to+0}\frac{g''(t)}{f''(t)}=\boxed{\text{ク}}\,\pi$$

がわかる。

ア，イ，ウ，エ，オ，カ，キの解答群

⓪ t　① t^2　② t^3　③ $1+t$　④ $2+t$

⑤ $1+2t$　⑥ $1+t^2$　⑦ $2+t^2$　⑧ $1+t^3$　⑨ $2+t^3$

（このページは計算用紙として使用してよい）

〔Ⅱ〕 次の空欄に当てはまる0から9までの数字を，解答用紙の所定の欄にマークせよ。

a，b，c は実数の定数として，関数 $f(x)$ を次のように定める。

$$f(x)=\begin{cases} a & (x \leqq 0) \\ \dfrac{\sin(\pi x)\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x(x-1)\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{2}(x-1)\right)}{(\pi x(x-1))^2} & (0<x<1) \\ b-c\pi(x-1) & (x \geqq 1) \end{cases}$$

$\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=\boxed{\text{ア}}$ であることから，関数 $f(x)$ が，$x=0$ で連続ならば

$$a=\frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$$

となり，$x=1$ で微分可能ならば

$$b=\boxed{\text{エ}},\qquad c=\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$$

となる。

（このページは計算用紙として使用してよい）

〔Ⅲ〕 次の空欄**ア**から**オ**に当てはまるものを解答群の中から選び，解答用紙の所定の欄の数字をマークせよ。なお，一つの解答群から同じものを二回以上選んでもよい。それ以外の空欄には，当てはまる0から9までの数字を解答用紙の所定の欄にマークせよ。

a，b を正の実数とし，方程式 $\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{b}=1$ によって定まる楕円を E とする。楕円 E が不等式 $y \geqq x^2-1$ の表す領域 D に含まれるための，a，b の条件を調べたい。

楕円 E は θ を媒介変数として，

$$x = \boxed{\text{ア}}\cos\theta, \quad y = \boxed{\text{イ}}\sin\theta$$

と表示できる。楕円 E が領域 D に含まれる必要十分条件は

$$\boxed{\text{ウ}}\sin^2\theta + \boxed{\text{エ}}\sin\theta + 1 - \boxed{\text{オ}} \geqq 0$$

である。そこで，$f(x) = \boxed{\text{ウ}}\,x^2 + \boxed{\text{エ}}\,x + 1 - \boxed{\text{オ}}$ とおき，$-1 \leqq x \leqq 1$ のときに $f(x) \geqq 0$ となる条件を求めればよい。放物線 $y=f(x)$ の軸を直線 $x=c$ とおく。このとき，

$$c = -\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{カ}}\,\boxed{\text{ウ}}} < 0$$

である。$c \leqq -1$ のときは，$f(-1) \geqq 0$ により $b \leqq \boxed{\text{キ}}$ となる。$c > -1$ のときは，$f(x)=0$ の判別式を使って $b \leqq \boxed{\text{ク}}\,a - \boxed{\text{ケ}}\,a^2$ がわかる。

上で求めた a，b の満たす範囲を ab 座標平面に図示することにより，楕円 E が領域 D に含まれるための必要十分条件は，

$$0 < b \leqq \boxed{\text{キ}} \quad \text{かつ} \quad 0 < a \leqq \frac{\boxed{\text{コ}} + \sqrt{\boxed{\text{サ}} - b}}{\boxed{\text{シ}}}$$

であることがわかる。

ア，イ，ウ，エ，オの解答群

⓪ $\sqrt{a}$　① a　② a^2　③ $\sqrt{b}$　④ b

⑤ b^2　⑥ $\sqrt{ab}$　⑦ ab　⑧ a^2b^2　⑨ $a+b$

（このページは計算用紙として使用してよい）

〔Ⅳ〕 次の空欄**ウ**，**カ**，**ケ**，**シ**，**ス**に当てはまるものを解答群の中から選び，解答用紙の所定の欄の数字をマークせよ。なお，一つの解答群から同じものを二回以上選んでもよい。それ以外の空欄には，当てはまる0から9までの数字を解答用紙の所定の欄にマークせよ。ただし，$\boxed{\text{セソタチ}}$ は，4桁の数を表すものとする。

log は自然対数を表し，n は4以上の自然数とする。

(1) $m = 2, 3, \cdots, n-1$ に対して，4点 $(m,\ 0)$，$(m+1,\ 0)$，$(m+1,\ \log(m+1))$，$(m,\ \log m)$ を頂点とする台形の面積を A_m とする。このとき，次が成り立つ。

$$\frac{1}{2}\log 2 + \sum_{m=2}^{n-1} A_m = \log(n!) - \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\boxed{\text{ウ}}$$

(2) $k = 1, 2, \cdots, n$ に対して，$y = f_k(x)$ は点 $(k,\ \log k)$ における $y = \log x$ の接線の方程式であるとする。$B = \displaystyle\int_1^{\frac{3}{2}} f_1(x)\,dx$，$m = 2, 3, \cdots, n-1$ に対して $C_m = \displaystyle\int_{m-\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} f_m(x)\,dx$，$D = \displaystyle\int_{n-\frac{1}{2}}^{n} f_n(x)\,dx$ とおく。このとき，以下が成り立つ。

$$B = \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$$

$$C_m = \boxed{\text{カ}}$$

$$D = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\boxed{\text{ケ}} - \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}\boxed{\text{シ}}}$$

(3)　B，D および，$m = 2, 3, \cdots, n-1$ に対して A_m，C_m は，(1)，(2) で定めたものとする。このとき，$y = \log x$ のグラフは上に凸であるので，

$$\frac{1}{2}\log 2 + \sum_{m=2}^{n-1} A_m \leqq \int_1^n \log x\,dx \leqq B + \sum_{m=2}^{n-1} C_m + D$$

が成り立つ。ここで，$\int_1^n \log x\,dx = \boxed{\text{ス}} + 1$ を使うと，

$$1 - \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}} \leqq \log(n!) - \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\boxed{\text{ウ}} - \boxed{\text{ス}} \leqq 1$$

となる。この不等式を利用して 1000! の桁数を求めると，$\boxed{\text{セソタチ}}$ であることがわかる。ただし，$\frac{1}{\log 10} = 0.4343$ とする。

ウ，カ，ケ，シ，スの解答群

⓪ n	① m	② $\log n$
③ $\log m$	④ $\log(n+1)$	⑤ $\log(m+1)$
⑥ $n \log n$	⑦ $n(\log n - 1)$	⑧ $n(\log n + 1)$
⑨ $\frac{\log n}{n}$		