2020 年度入学試験問題

数　　学

（試験時間　13：35〜15：15　　100 分）

1．解答用紙は，記述解答用紙のみです。

2．問題は，Ⅰ〜Ⅳの４題あります。そのうち３題を選択して解答してください。**選択した問題には解答用紙の設問番号の右側の選択欄に○を，選択しなかった問題には×を記入してください。（選択欄の記入がない場合は採点の対象となりませんので注意してください。）**

　なお，**４題すべてに○を記入した場合は，数学の解答はすべて無効となります。**

（記入例）

Ⅰ	選　択	○

3．解答は，必ず解答欄に記入してください。解答欄以外に書くと無効となります。

4．解答は，ＨＢの鉛筆またはシャープペンシルを使用し，訂正する場合は，プラスチック製の消しゴムを使用してください。

5．解答用紙には，受験番号と氏名を必ず記入してください。

6．満点が 150 点となる配点表示になっていますが，数学科は満点が 300 点であり，各問の配点は２倍となります。

(設問は 2 ページより始まる)

I　楕円 $C: 7x^2+10y^2=2800$ の有理点とは，C 上の点でその x 座標，y 座標がともに有理数であるものをいう。また，C の整数点とは，C 上の点でその x 座標，y 座標がともに整数であるものをいう。整数点はもちろん有理点でもある。点 $\mathrm{P}(-20,0)$，$\mathrm{Q}(20,0)$ は C の整数点である。以下の問いに答えよ。(50 点)

(1)　実数 a を傾きとする直線 $\ell_a: y=a(x+20)$ と C の交点を求めよ。

(2)　(1) を用いて，C の有理点は無数にあることを示せ。

(3)　C の整数点は P と Q のみであることを示せ。

（設問は次のページにつづく）

II　a と b を正の実数とする。t が実数全体を動くとき，複素数平面上の点 $z = a + ti$ は虚軸に平行な直線上を動く（i は虚数単位)。このとき，$w = z^2$ はある曲線 C_a を複素数平面上に描く。同様に s が実数全体を動くとき，$z = s + bi$ は実軸に平行な直線上を動き，そのとき $w = z^2$ はある曲線 D_b を描く。2 曲線 C_a, D_b は 2 点 P(w_1), Q(w_2) で交わる。ただし 2 点 P, Q のうち，虚部が大きい方を P とする。以下の問いに答えよ。(50 点)

(1)　曲線 C_a 上の点を複素数 $w = x + yi$ により表すとき，x と y が満たす方程式を求めよ。同様に曲線 D_b 上の点を複素数 $w = x + yi$ により表すとき，x と y が満たす方程式を求めよ。また，交点 P(w_1), Q(w_2) を a と b で表せ。

(2)　2 曲線 C_a, D_b で囲まれた部分の面積 S を a と b で表せ。

以下では a, b が

$$a^2 + b^2 = 1, \quad a > 0, \quad b > 0 \quad \cdots\cdots \quad (*)$$

を満たしているとする。

(3)　a, b が $(*)$ を満たしながら動くとき，交点 P を表す複素数の実部 x と虚部 y が満たす方程式を求めよ。

(4)　2 曲線 C_a, D_b で囲まれた部分の面積 S を a で表せ。また a, b が $(*)$ を満たしながら動くとき，S がとりうる値の範囲を求めよ。

(設問は次のページにつづく)

III　正方形 ABCD の頂点 A，B，C，D が反時計回りに並んでいる。動点 Q は頂点 A を出発し，1 秒ごとにとなりの頂点へ移動する。移動する方向は，確率 p で反時計回り，確率 $1-p$ で時計回りである。ただし，p は $0<p<1$ を満たす実数とする。

出発してから $2n$ 秒後に点 Q が頂点 A にある確率を a_n とし，頂点 C にある確率を c_n とする。また，$r=a_1$ とおく。以下の問いに答えよ。（50 点）

(1)　r を p で表し，$a_1-c_1 \leqq 0$ が成り立つことを示せ。

(2)　a_2 と c_2 を r で表せ。また，$a_2-c_2 \geqq 0$ が成り立つことを示せ。

(3)　$n=1,2,3,\cdots$ に対して，$a_{n+1}-c_{n+1}$ を a_n-c_n と r で表せ。

(4)　$n=1,2,3,\cdots$ に対して，$a_n>c_n$ となる n と p の条件を求めよ。

(設問は次のページにつづく)

IV　p, q, r を正の実数とする。以下の問いに答えよ。(50 点)

(1)　$I(t) = \displaystyle\int_1^t \frac{1}{x^p}\,dx \quad (t \geqq 1)$ を求めよ。

(2)　$J(t) = \displaystyle\int_e^t \frac{1}{x(\log x)^q}\,dx \quad (t \geqq e)$ を求めよ。

(3)　$K(t) = \displaystyle\int_1^t \frac{\log x}{x^r}\,dx \quad (t \geqq 1)$ を求めよ。

(4)　$t \to \infty$ としたとき，上で求めた $I(t)$，$J(t)$，$K(t)$ が有限な極限値をもつための p, q, r の条件を求めよ。必要であれば $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = 0$ を用いてよい。

（以下計算用紙）

（計算用紙）

(計算用紙)

（計算用紙）

（計算用紙）