2018 年 度 入 学 試 験 問 題

数　　学

（試験時間　13：35～15：15　100 分）

1．解答用紙は，記述解答用紙のみです。

2．問題は，Ⅰ～Ⅳの４題あります。そのうち３題を選択して解答してください。選択した問題には解答用紙の設問番号の右側の選択欄に○を記入してください。（○の記入がない場合は採点の対象となりませんので注意してください。）

なお，４題すべてに○を記入した場合は，数学の解答はすべて無効となります。

（記入例）

Ⅰ	選　択	○

3．解答は，必ず解答欄に記入してください。解答欄以外に書くと無効となりますので注意してください。

4．解答は，ＨＢの鉛筆またはシャープペンシルを使用し，訂正する場合は，プラスチック製の消しゴムを使用してください。

5．解答用紙には，受験番号と氏名を必ず記入してください。

6．満点が 150 点となる配点表示になっていますが，数学科は満点が 300 点であり，各問の配点は２倍となります。

142－MQ

I　座標平面において，半直線 $y=-\sqrt{3}x$ $(x \leqq 0)$ を ℓ とし，半直線 $y=\sqrt{3}x$ $(x \geqq 0)$ を m とする。そして2点P，Qが次の条件 $(*)$ を満たすとする。

$(*)$　Pは ℓ 上に，Qは m 上にあり，$\mathrm{PQ}=2$ が成り立つ。

さらに，$\triangle\mathrm{PQR}$ がPQを斜辺とする直角二等辺三角形となるように点Rをとる。ただし，Rは直線PQの上側にあるものとする。以下の問いに答えよ。(50点)

(1)　$p \geqq 0$，$q \geqq 0$ として，点Pの座標を $(-p, \sqrt{3}p)$，点Qの座標を $(q, \sqrt{3}q)$ とおく。p と q の間に成り立つ関係式を求めよ。

(2)　点Rの座標を (X, Y) とおく。X と Y をそれぞれ p，q を用いて表せ。ただし，(a, b) を $(0, 0)$ でないベクトルとするとき，(a, b) に垂直で大きさが等しいベクトルは，$(-b, a)$ または $(b, -a)$ であることを用いてよい。

(3)　PとQが条件 $(*)$ を満たしながら動くときのRの軌跡を C とする。C はある楕円の一部である。その楕円の方程式を求めよ。

(4)　$p \geqq 0$，$q \geqq 0$ に注意して，軌跡 C を図示せよ。

II　以下の問いに答えよ。(50 点)

(1)　自然数 n が奇数のとき，n^2 を 4 で割った余りは 1 であることを示せ。

(2)　自然数 n に対し，n^2 を 25 で割った余りを a_n とし，n^4 を 25 で割った余りを b_n とする。$n = 1, 2, 3, \ldots, 12$ について，a_n と b_n を表にまとめよ。結果のみ記せばよい。

以下では，自然数 $N = \displaystyle\sum_{n=1}^{100} n^4$ について考える。

(3)　N を 4 で割った余りを求めよ。

(4)　N を 25 で割った余りを求めよ。

(5)　N の下 2 桁を決定せよ。

III　q は $0<q<1$ を満たす実数とする。多項式 $f(x)$ に対し，

$$F(x)=\frac{f(x)-f(qx)}{(1-q)x}$$

と定める。恒等式

$$x(x-1)F(x)-(1+q)xf(x)=cf(x) \qquad \cdots\cdots \quad (\star)$$

を満たす実数 c と多項式 $f(x)$ を求めたい。以下の問いに答えよ。(50 点)

(1)　$f(x)=x^n$ （n は自然数）に対して，多項式 $F(x)$ を求めよ。

(2)　ある c に対して，0 でない多項式 $f(x)$ が $(\star)$ を満たすと仮定する。このとき，$f(x)$ は 2 次式であることを示せ。

(3)　ある c に対して，2 次式 $f(x)=x^2+ax+b$ が $(\star)$ を満たすと仮定する。実数の組 (a,b,c) をすべて求めよ。

IV　p を 1 でない正の実数とし，$f(x)=e^{x}$，$g(x)=e^{px}$ とおく。曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における接線を ℓ_1 とし，曲線 $y=g(x)$ 上の点 $(b, g(b))$ における接線を ℓ_2 とする。以下の問いに答えよ。(50 点)

(1)　ℓ_1 と ℓ_2 の方程式をそれぞれ求めよ。

以下では ℓ_1 と ℓ_2 が一致していると仮定する。

(2)　a，b を p で表せ。

(3)　極限 $\lim_{p \to 1} b$ および $\lim_{p \to \infty} b$ を求めよ。必要ならば，$\lim_{t \to \infty} \dfrac{e^t}{t} = \infty$ であることを用いてよい。

(4)　$0<p<1$ とする。曲線 $y=f(x)$，y 軸，および直線 $y=e^{a}$ で囲まれた部分の面積を S_1 とし，曲線 $y=f(x)$，y 軸，および直線 $y=e^{pb}$ で囲まれた部分の面積を S_2 とする。このとき，$S_1=S_2$ が成り立つことを示せ。ただし，$0<p<1$ ならば $a<0<b$ であることを用いてよい。