2012 年 度 入 学 試 験 問 題

数　　学

（試験時間　13：35〜15：15　100 分）

1．解答用紙は，記述解答用紙のみです。

2．<u>問題は，Ⅰ〜Ⅳの 4 題あります。そのうち 3 題を選択して解答してください。選択した問題には解答用紙の選択欄に○を記入してください。○の記入がない場合は採点の対象となりませんので注意してください。</u>

<u>なお，4 題すべてに○を記入した場合は，数学の解答はすべて無効となります。</u>

（記入例）

Ⅰ	選　択	○

3．解答は，必ず解答欄に記入してください。なお，解答欄以外に書くと無効となりますので注意してください。

4．解答は，ＨＢの鉛筆またはシャープペンシルを使用し，訂正する場合は，プラスチック製の消しゴムを使用してください。

5．解答用紙には，受験番号と氏名を必ず記入してください。

6．設問文にある点数は，満点が 150 点となるような配点表示になっていますが，数学科の配点は 300 点となります。

I　以下の問いに答えよ。(50 点)

(1)　$\sin 3\theta$ を $\sin\theta$ を用いて表せ。

(2)　$\sin\frac{2\pi}{5}=\sin\frac{3\pi}{5}$ に着目して $\cos\frac{\pi}{5}$ と $\sin\frac{\pi}{5}$ の値を求めよ。

(3)　積 $\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5}\sin\frac{3\pi}{5}\sin\frac{4\pi}{5}$ の値を求めよ。

（設問は次ページに続く。）

II　以下の問いに答えよ。(50 点)

2 次関数や 3 次関数 $y=f(x)$ から新しい関数 $F(x)$ を次のように作る。

実数 x に対して，$f(\alpha)=f(x)$ を満たす最大の α をとり

$$F(x)=\alpha-x$$

と定める。

例えば，$f(x)=x^2$ の場合，実数 x に対して α の方程式 $f(\alpha)=f(x)$ は $\alpha^2=x^2$ であり，$\alpha=\pm x$ となる。したがって，その 2 つの α のうち大きい方をとれば次を得る。

$x<0$ のとき　$\alpha=-x$　により　$F(x)=\alpha-x=-2x=2|x|$

$x\geqq 0$ のとき　$\alpha=x$　により　$F(x)=\alpha-x=0$

以下では $f(x)=x^3-3b^2x\ (b>0)$ に対して，上の操作で定めた関数 $F(x)$ を考える。

(1)　$F(-b)$，$F(0)$，$F(b)$ の値を求めよ。

(2)　$F(x)=0$ となる x の範囲を求めよ。また $F(x)>0$ となる x の範囲を求めよ。

(3)　$F(x)>0$ となる x に対し，$f(\alpha)=f(x)$ を満たす最大の α を x の式で表せ。

(4)　関数 $y=F(x)$ を求め，そのグラフの概形をかけ。また $F(x)$ の最大値を求めよ。

（設問は次ページに続く。）

III　$h>0$, $d \geqq 0$ とし，座標空間において4点 A$(0,0,1)$, B$(0,0,-1)$, C$(h,0,-d)$, D$(0,h,d)$ を頂点とする四面体を考える。さらに CD $=2$ とする。したがって，四面体の6本の辺のうち向かい合う2辺の長さは3組とも互いに等しい。つまり

$$\mathrm{AB}=\mathrm{CD}, \quad \mathrm{AC}=\mathrm{BD}, \quad \mathrm{AD}=\mathrm{BC}$$

となっており，4つの面はすべて互いに合同である。この四面体 ABCD について以下の問いに答えよ。(50点)

(1)　h を d で表し，d のとりうる値の範囲を求めよ。

点Aを通り平面 BCD に垂直な直線と平面 BCD の交点をPとおく。この点Pを点Aから平面 BCD に下ろした垂線の足とよぶ。同様に，点Bから平面 ACD に下ろした垂線の足をQ，点Cから平面 ABD へ下ろした垂線の足をR，点Dから平面 ABC へ下ろした垂線の足をSとおく。

(2)　点R，Sは直線 AB 上にあることに注意して，R，Sの座標を d で表せ。また，四面体 ABCD の対称性を考慮して，点P，Qの座標を d で表せ。さらに，計算により $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=0$ を確認せよ。

(3)　辺 BD の長さのとりうる値の範囲を求めよ。

(4)　平面 ABC と平面 ACD が直線 AC に沿って角度 $\theta\left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ で交わっている。θ のとりうる値の範囲を求めよ。ただし2平面の交わる角度とは，それぞれの平面に直交する2直線のなす角度である。

（設問は次ページに続く。）

IV $f(x)=\sin\left(\log\dfrac{1}{x}\right)$ $(0<x\leqq 1)$ とおく。$f(x)=0$ となるすべての x を，大きい順に $a_0, a_1, a_2, \cdots$ とする。以下の問いに答えよ。(50 点)

(1) a_n $(n=0,1,2,\cdots)$ を求めよ。

(2) 正の定数 a，b に対し

$$\frac{d}{dx}(Ae^{-ax}\cos bx+Be^{-ax}\sin bx)=e^{-ax}\cos bx$$

を満たす定数 A，B を求め，不定積分

$$\int e^{-ax}\cos bx\,dx$$

を求めよ。

(3) $b_n=\displaystyle\int_{a_{n+1}}^{a_n}\{f(x)\}^2dx$ $(n=0,1,2,\cdots)$ を，$t=\log\dfrac{1}{x}$ とおくことにより求めよ。

(4) (3) で得られた数列 $\{b_n\}$ に対し，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ の和を求めよ。

(以下計算用紙)