2016 年 度 入 学 試 験 問 題

数　　学

（試験時間　15：20～17：00　　100 分）

1．解答用紙には，記述解答用紙とマーク解答用紙の２種類がありますので注意してください。

2．解答は，必ず解答欄に記入およびマークしてください。解答欄以外への記入およびマークは無効となりますので注意してください。

3．解答は，ＨＢの鉛筆またはシャープペンシルを使用し，訂正する場合は，プラスチック製の消しゴムを使用してください。特に，マーク解答用紙には鉛筆のあとや消しくずを残さないでください。

4．解答用紙を折り曲げたり，汚したりしないでください。また，マーク解答用紙を記述解答用紙の下敷きに使用しないでください。

5．解答用紙には，必ず受験番号と氏名を記入およびマークしてください。

6．マーク解答用紙への受験番号の記入およびマークは，コンピュータ処理上非常に重要なので，誤記のないよう特に注意してください。

7．満点が 100 点となる配点表示になっていますが，数学科は満点が 200 点であり，各問の配点は２倍となります。

141－MQ

(設問は2ページより始まる。)

I　次の問題文の空欄にもっとも適する答えを解答群から選び，その記号をマーク解答用紙にマークせよ。ただし，同じ記号を2度以上用いてもよい。(20 点)

曲線 $C: y=\dfrac{2}{x^3}$ の上に点の列 $\mathrm{P}_1(x_1, y_1)$, $\mathrm{P}_2(x_2, y_2)$, $\cdots$, $\mathrm{P}_n(x_n, y_n)$, $\cdots$ をとる。ただし，$x_1=1$ かつ $0<x_{n+1}<x_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ とする。O を原点とし，線分 OP_n, OP_{n+1} と曲線 C で囲まれた部分の面積を S_n とする。S_n を x_n と x_{n+1} で表すと $\boxed{\text{ア}}$ である。

さて，初項 1，公比 $\dfrac{2}{3}$ の等比数列の第 n 項までの和 T_n は $\boxed{\text{イ}}$ である。いま，P_n における C の接線と x 軸との交点の x 座標 r_n が

$$r_n T_n = \frac{4}{3}$$

を満たすとする。このとき，

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \boxed{\text{ウ}}, \quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} S_k = \boxed{\text{エ}}$$

である。

問題 I のアの解答群

ⓐ $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x_{n+1}}-\dfrac{1}{x_n}\right)$　ⓑ $\dfrac{1}{x_{n+1}}-\dfrac{1}{x_n}$　ⓒ $\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{x_{n+1}}-\dfrac{1}{x_n}\right)$

ⓓ $2\left(\dfrac{1}{x_{n+1}}-\dfrac{1}{x_n}\right)$　ⓔ $3\left(\dfrac{1}{x_{n+1}}-\dfrac{1}{x_n}\right)$　ⓕ $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{{x_{n+1}}^2}-\dfrac{1}{{x_n}^2}\right)$

ⓖ $\dfrac{1}{{x_{n+1}}^2}-\dfrac{1}{{x_n}^2}$　ⓗ $\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{{x_{n+1}}^2}-\dfrac{1}{{x_n}^2}\right)$　ⓘ $2\left(\dfrac{1}{{x_{n+1}}^2}-\dfrac{1}{{x_n}^2}\right)$

ⓙ $3\left(\dfrac{1}{{x_{n+1}}^2}-\dfrac{1}{{x_n}^2}\right)$

問題 I のイの解答群

ⓐ $\dfrac{1}{3}\left\{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}$ ⓑ $\dfrac{1}{3}\left\{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n}\right\}$ ⓒ $\dfrac{1}{3}\left\{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}\right\}$

ⓓ $3\left\{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}$ ⓔ $3\left\{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n}\right\}$ ⓕ $3\left\{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}\right\}$

問題 I のウ，エ の解答群

ⓐ $\dfrac{1}{3}$ ⓑ $\dfrac{9}{16}$ ⓒ $\dfrac{2}{3}$ ⓓ $\dfrac{3}{4}$ ⓔ 1 ⓕ $\dfrac{4}{3}$ ⓖ $\dfrac{16}{9}$

ⓗ 2 ⓘ $\dfrac{8}{3}$ ⓙ 3 ⓚ 4 ⓛ 6 ⓜ 8 ⓝ 12

ⓞ 16 ⓟ $\dfrac{64}{3}$ ⓠ 24

(設問は次のページにつづく)

II　次の問題文の空欄にもっとも適する答えを解答群から選び，その記号をマーク解答用紙にマークせよ。ただし，同じ記号を2度以上用いてもよい。(20点)

点$\mathrm{P}(t,t^2)$における放物線$y=x^2$の接線をℓとすると，ℓの方程式は$y=\boxed{\text{オ}}$である。tが$0\leqq t\leqq 1$の範囲を動くときにℓが通過する領域をDとする。Dを図示するには，xを固定して$y=\boxed{\text{オ}}$をtの関数とみなし，$0\leqq t\leqq 1$のときにyのとりうる値の範囲を調べればよい。すると，

$x\leqq 0$　のとき　$\boxed{\text{カ}}\leqq y\leqq\boxed{\text{キ}}$,

$0\leqq x\leqq\dfrac{1}{2}$　のとき　$\boxed{\text{カ}}\leqq y\leqq\boxed{\text{ク}}$,

$\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 1$　のとき　$\boxed{\text{キ}}\leqq y\leqq\boxed{\text{ク}}$,

$1\leqq x$　のとき　$\boxed{\text{キ}}\leqq y\leqq\boxed{\text{カ}}$

である。

次に，aを定数とし，点$(0,a)$をAとする。点Qが領域D上を動くとき，線分AQの長さの最小値は

$a\leqq -1$　のとき　$\boxed{\text{ケ}}$,

$-1\leqq a\leqq 0$　のとき　0,

$0\leqq a\leqq\dfrac{1}{2}$　のとき　$\boxed{\text{コ}}$,

$\dfrac{1}{2}\leqq a\leqq\dfrac{3}{2}$　のとき　$\boxed{\text{サ}}$,

$\dfrac{3}{2}\leqq a$　のとき　$\boxed{\text{シ}}$

である。

問題 II のオの解答群

ⓐ $tx-t^2$　ⓑ $tx-2t^2$　ⓒ $tx-3t^2$　ⓓ $2tx-t^2$

ⓔ $2tx-2t^2$　ⓕ $2tx-3t^2$

問題 II のカ，キ，クの解答群

ⓐ -2　ⓑ -1　ⓒ 0　ⓓ 1　ⓔ 2

ⓕ $x-1$　ⓖ $x-2$　ⓗ $x-3$　ⓘ $2x-1$　ⓙ $2x-2$

ⓚ $2x-3$　ⓛ x^2-1　ⓜ x^2　ⓝ x^2+1　ⓞ $2x^2-1$

ⓟ $2x^2$　ⓠ $2x^2+1$

問題 II のケ，コ，サ，シの解答群

ⓐ $\frac{1}{2}$　ⓑ $\frac{\sqrt{3}}{2}$　ⓒ 1　ⓓ $\frac{\sqrt{5}}{2}$　ⓔ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

ⓕ $-\frac{a+1}{\sqrt{5}}$　ⓖ $\frac{a+1}{\sqrt{5}}$　ⓗ $-\frac{a+1}{\sqrt{3}}$　ⓘ $\frac{a+1}{\sqrt{3}}$　ⓙ $-a$

ⓚ a　ⓛ $-2a$　ⓜ $2a$　ⓝ $\sqrt{a-\frac{1}{4}}$　ⓞ $\sqrt{a+\frac{1}{4}}$

ⓟ $\sqrt{a^2-2a+2}$

（設問は次のページにつづく）

III　xy 平面において，定点 $\mathrm{A}(a,b)$ $(a,b>0)$ を通り，傾き $m=-\tan\theta$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の直線を ℓ とする。この直線 ℓ が x 軸と交わる点を P とし，y 軸と交わる点を Q とする。(30 点)

(1) 線分 AP, 線分 AQ および線分 PQ の長さを θ, a, b で表せ。

(2) 線分 PQ の長さ $L(\theta)$ を最小とする θ に対して，$\tan\theta$ の値を a と b で表せ。またこのときの $L(\theta)$ の値を a と b で表せ。

xy 平面上に，$\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{B}(135,0)$, $\mathrm{C}(135,320)$, $\mathrm{D}(0,320)$ の 4 点を頂点とする長方形 OBCD をとる。定点 A として，この長方形の内部の点 $(27,64)$ をとる。このとき，点 A を通る直線 k と長方形 OBCD の共通部分の長さを K とする。(1)，(2) の考察を利用して，直線 k の傾き m が変化するときの K の最小値を求めよう。

(3) 直線 k が辺 OB と辺 OD の両方と交わるとき，m がとりうる値の範囲を求めよ。またこのとき，K の最小値 M を求めよ。

(4) 直線 k の傾き $m=-\tan\theta$ を $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で動かしても，K の値は (3) で求めた M 以上であることを示せ。

（設問は次のページにつづく）

IV　n を 2 以上の整数とし, $x \geqq 1$ の範囲で $f_n(x) = \dfrac{(\log x)^n}{x}$ とする。(30 点)

(1) $f_n(x)$ の最大値および $\displaystyle\lim_{x \to \infty} f_n(x)$ を求めよ。また，$y = f_n(x)$ のグラフの変曲点の x 座標を求めよ。必要ならば $\displaystyle\lim_{t \to \infty} \frac{t}{e^t} = 0$ を用いてよい。

(2) k を正の整数とする。点 $(a, f_{2k}(a))$（ただし $a > 1$）における $y = f_{2k}(x)$ のグラフの接線 ℓ は原点を通るとする。接点の座標 $(a, f_{2k}(a))$ を k で表せ。

(3) $y = f_{2k}(x)$ のグラフと (2) の接線 ℓ および x 軸によって囲まれた部分の面積を求めよ。

(計算用紙)