2015年度入学試験問題

数　　学

（試験時間　15：20～17：00　100分）

1．解答用紙は，記述解答用紙とマーク解答用紙の2種類がありますので注意してください。

2．解答は，必ず解答欄に記入してください。なお，解答欄以外に書くと無効となりますので注意してください。

3．解答は，HBの鉛筆またはシャープペンシルを使用し，訂正する場合は，プラスチック製の消しゴムを使用してください。特に，マーク解答用紙には鉛筆のあとや消しくずを残さないでください。また，折りまげたり，汚したりしないでください。記述解答用紙の下敷きにマーク解答用紙を使用することは絶対にさけてください。

4．解答用紙には，受験番号と氏名を必ず記入してください。

5．マーク解答用紙の受験番号および受験番号のマーク記入は，コンピュータ処理上非常に重要なので，誤記のないよう特に注意してください。

6．満点が100点となる配点表示になっていますが，数学科は満点が200点であり，各問の配点は2倍になります。

(設問は２ページより始まる。)

I　次の問題文の空欄にもっとも適する答えを解答群から選び，その記号をマーク解答用紙にマークせよ。ただし，同じ記号を2度以上用いてもよい。(20点)

関数 $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ $(x > 0)$ を考える。まず，

$$\lim_{x \to +0} f(x) = \boxed{\quad ア \quad}$$

である。ところで，

$$\int_0^x t \sin t \, dt = \boxed{\quad イ \quad}$$

であり，$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$\int_0^x t \sin t \, dt \ \boxed{\quad ウ \quad} \ x^2 \sin x$$

が成り立つので，$\displaystyle\lim_{x \to +0} \frac{\boxed{\quad イ \quad}}{x^2} = \boxed{\quad エ \quad}$ である。これにより $\displaystyle\lim_{x \to +0} f'(x) = \boxed{\quad オ \quad}$ がわかる。

さて，自然数 n に対し，$a_n = \displaystyle\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} f(x)\,dx$，$b_n = \displaystyle\int_{(2n+1)\pi}^{(2n+2)\pi} f(x)\,dx$ とおく。このとき，a_n は不等式 $\boxed{\quad カ \quad}$ を満たす。$a_n + b_n$ は不等式 $\boxed{\quad キ \quad}$ を満たす。

問題Iのア，エ，オの解答群

ⓐ $-\infty$　　ⓑ $-\pi$　　ⓒ -1　　ⓓ $-\dfrac{1}{\pi}$　　ⓔ 0

ⓕ $\dfrac{1}{\pi}$　　ⓖ 1　　ⓗ π　　ⓘ ∞

問題Iのイの解答群

ⓐ $x \sin x + \cos x$　　ⓑ $x \sin x - \cos x$　　ⓒ $-x \sin x + \cos x$

ⓓ $-x \sin x - \cos x$　　ⓔ $x \cos x + \sin x$　　ⓕ $x \cos x - \sin x$

ⓖ $-x \cos x + \sin x$　　ⓗ $-x \cos x - \sin x$

問題Iのウの解答群

ⓐ $<$　　ⓑ $=$　　ⓒ $>$

問題Ⅰのカの解答群

ⓐ $\dfrac{1}{(n+2)\pi} < a_n < \dfrac{2}{(2n+3)\pi}$

ⓑ $\dfrac{2}{(2n+3)\pi} < a_n < \dfrac{1}{(n+1)\pi}$

ⓒ $\dfrac{1}{(n+1)\pi} < a_n < \dfrac{2}{(2n+1)\pi}$

ⓓ $\dfrac{2}{(2n+1)\pi} < a_n < \dfrac{1}{n\pi}$

ⓔ $\dfrac{1}{n\pi} < a_n < \dfrac{2}{(2n-1)\pi}$

問題Ⅰのキの解答群

ⓐ $-\dfrac{1}{n(2n-1)\pi} < a_n + b_n < -\dfrac{1}{n(2n+1)\pi}$

ⓑ $-\dfrac{1}{n(2n+1)\pi} < a_n + b_n < -\dfrac{1}{(n+1)(2n+1)\pi}$

ⓒ $-\dfrac{1}{(n+1)(2n+1)\pi} < a_n + b_n < -\dfrac{1}{(n+1)(2n+3)\pi}$

ⓓ $\dfrac{1}{(n+1)(2n+3)\pi} < a_n + b_n < \dfrac{1}{(n+1)(2n+1)\pi}$

ⓔ $\dfrac{1}{(n+1)(2n+1)\pi} < a_n + b_n < \dfrac{1}{n(2n+1)\pi}$

ⓕ $\dfrac{1}{n(2n+1)\pi} < a_n + b_n < \dfrac{1}{n(2n-1)\pi}$

（設問は次のページにつづく）

II　次の問題文の空欄にもっとも適する答えを解答群から選び，その記号をマーク解答用紙にマークせよ。ただし，同じ記号を２度以上用いてもよい。(20 点)

i を虚数単位とする。実数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を

$$\left(\frac{1+i}{2}\right)^n = a_n + ib_n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

により定める。a_{n+1} を a_n と b_n で表すと $a_{n+1} = \boxed{\text{ク}}$ であり，b_{n+1} を a_n と b_n で表すと $b_{n+1} = \boxed{\text{ケ}}$ である。また，a_n^2 と b_n^2 で $a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2$ を表すと

$$a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 = \boxed{\text{コ}}$$

であり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \boxed{\text{サ}}$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \boxed{\text{シ}}$ である。

次に，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ と $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が収束するかどうかを調べる。

$$c = \frac{1+i}{2}$$

とおくと，$a_n + ib_n = c^n$ であるから，自然数 N に対し，

$$\sum_{n=1}^{N} a_n + i\sum_{n=1}^{N} b_n = \boxed{\text{ス}}$$

である。$\boxed{\text{ス}}$ を a_N と b_N で表すと，

$$\boxed{\text{ス}} = \boxed{\text{セ}} + i\boxed{\text{ソ}}$$

であるから，

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = \boxed{\text{セ}}, \qquad \sum_{n=1}^{N} b_n = \boxed{\text{ソ}}$$

となる。したがって，

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \boxed{\text{タ}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \boxed{\text{チ}}$$

である。

問題 II のク，ケの解答群

ⓐ $\dfrac{-a_n - b_n}{2}$　ⓑ $\dfrac{-a_n + b_n}{2}$　ⓒ $\dfrac{a_n - b_n}{2}$　ⓓ $\dfrac{a_n + b_n}{2}$

ⓔ $\dfrac{-a_n - 2b_n}{2}$　ⓕ $\dfrac{-a_n + 2b_n}{2}$　ⓖ $\dfrac{a_n - 2b_n}{2}$　ⓗ $\dfrac{a_n + 2b_n}{2}$

ⓘ $\dfrac{-2a_n - b_n}{2}$　ⓙ $\dfrac{-2a_n + b_n}{2}$　ⓚ $\dfrac{2a_n - b_n}{2}$　ⓛ $\dfrac{2a_n + b_n}{2}$

問題 II のコの解答群

ⓐ $a_n^2 + b_n^2$　ⓑ $2a_n^2 + b_n^2$　ⓒ $a_n^2 + 2b_n^2$　ⓓ $2(a_n^2 + b_n^2)$

ⓔ $\dfrac{a_n^2 + b_n^2}{2}$　ⓕ $\dfrac{2a_n^2 + b_n^2}{2}$　ⓖ $\dfrac{a_n^2 + 2b_n^2}{2}$

問題 II のサ，シ，タ，チの解答群

ⓐ -2　ⓑ $-\dfrac{3}{2}$　ⓒ -1　ⓓ $-\dfrac{2}{3}$　ⓔ $-\dfrac{1}{2}$　ⓕ 0

ⓖ $\dfrac{1}{2}$　ⓗ $\dfrac{2}{3}$　ⓘ 1　ⓙ $\dfrac{3}{2}$　ⓚ 2　ⓛ ∞

問題 II のスの解答群

ⓐ $\dfrac{1 - c^{N-1}}{1 - c}$　ⓑ $\dfrac{1 + c^{N-1}}{1 - c}$　ⓒ $\dfrac{1 - c^{N}}{1 - c}$　ⓓ $\dfrac{1 + c^{N}}{1 - c}$

ⓔ $\dfrac{1 - c^{N+1}}{1 - c}$　ⓕ $\dfrac{1 + c^{N+1}}{1 - c}$　ⓖ $\dfrac{c - c^{N-1}}{1 - c}$　ⓗ $\dfrac{c + c^{N-1}}{1 - c}$

ⓘ $\dfrac{c - c^{N}}{1 - c}$　ⓙ $\dfrac{c + c^{N}}{1 - c}$　ⓚ $\dfrac{c - c^{N+1}}{1 - c}$　ⓛ $\dfrac{c + c^{N+1}}{1 - c}$

問題 II のセ，ソの解答群

ⓐ $-a_N$　ⓑ $-b_N$　ⓒ a_N　ⓓ b_N

ⓔ $-1 + a_N$　ⓕ $-1 + b_N$　ⓖ $1 - a_N$　ⓗ $1 - b_N$

ⓘ $-a_N - b_N$　ⓙ $-a_N + b_N$　ⓚ $a_N - b_N$　ⓛ $a_N + b_N$

ⓜ $1 - a_N - b_N$　ⓝ $1 - a_N + b_N$　ⓞ $1 + a_N - b_N$　ⓟ $1 + a_N + b_N$

(設問は次のページにつづく)

III　a を正の定数とし，座標平面上の 2 点 A$(2a, 0)$，B$(-2a, 0)$ を焦点とする双曲線

$$C : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3a^2} = 1$$

を考える。この双曲線の第 1 象限の部分を C_1 とし，動点 P(s, t) は C_1 上を動くものとする。以下の問いに答えよ。(30 点)

(1) 極限 $\displaystyle\lim_{s\to\infty}\left(\sqrt{3}\,s - t\right)$ および $\displaystyle\lim_{s\to\infty} s\left(\sqrt{3}\,s - t\right)$ を求めよ。

双曲線 C の 2 本の漸近線のうち，傾きが正のものを ℓ とし，線分 PB と ℓ の交点を Q とする。

(2) 点 Q の y 座標を s, t で表せ。

(3) 線分 PQ と PB の長さの比 $\dfrac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{PB}}$ を s, t で表せ。

(4) 極限 $\displaystyle\lim_{s\to\infty} s \cdot \frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{PB}}$ を求めよ。

（設問は次のページにつづく）

IV　a を正の定数とする。関数 $f(x) = xe^{-ax}$　$\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{5}{a}\right)$　について，以下の問いに答えよ。(30点)

(1) 関数 $y = f(x)$ の極値とグラフの変曲点を求め，グラフの概形をかけ。

(2) 曲線 $y = f(x)$ の変曲点における接線 ℓ の方程式を求めよ。

(3) (1) で求めた変曲点の x 座標を b とし，

$$S = \int_0^b f(x)dx$$

とおく。また，(2) の接線 ℓ と x 軸，y 軸で囲まれた三角形の面積を T とおく。このとき，S と T を求め，

$$2S > T$$

であることを示せ。必要ならば，$e = 2.71828182845\cdots\cdots$ を用いてよい。

（以下計算用紙）

(計算用紙)

(計算用紙)

(計算用紙)

（計算用紙）