2020 年度入学試験問題

数　　学

（試験時間　15：20〜17：00　　100 分）

1．解答用紙には，記述解答用紙とマーク解答用紙の 2 種類があります。

2．解答は，必ず解答欄に記入およびマークしてください。解答欄以外への記入およびマークは無効となります。

3．解答は，ＨＢの鉛筆またはシャープペンシルを使用し，訂正する場合は，プラスチック製の消しゴムを使用してください。特に，マーク解答用紙には鉛筆のあとや消しくずを残さないでください。

4．解答用紙を折り曲げたり，汚したりしないでください。また，マーク解答用紙を記述解答用紙の下敷きに使用しないでください。

5．解答用紙には，必ず受験番号と氏名を記入およびマークしてください。

6．マーク解答用紙への受験番号の記入およびマークは，コンピュータ処理上非常に重要なので，誤記のないようにしてください。

7．一度記入したマークを修正する場合，しっかりと消してください。消し残しがあると，マーク読み取り装置が反応して解答が無効となることがあります。

8．満点が 100 点となる配点表示になっていますが，数学科は満点が 200 点であり，各問の配点は 2 倍となります。

（設問は 2 ページより始まる）

I　次の問題文の空欄にもっとも適する答えを解答群から選び，その記号をマーク解答用紙にマークせよ。ただし，同じ記号を2度以上用いてもよい。(20点)

座標空間において，原点 O(0, 0, 0) を中心とする半径1の球面を S とする。S 上の定点 N(0,0,1) を考え，N と異なる S 上の点 P(x, y, z) に対して，xy 平面上の点 Q($u, v, 0$) で

$$\overrightarrow{\mathrm{NQ}} = t\,\overrightarrow{\mathrm{NP}} \quad (t > 0)$$

となるものを対応させる。このとき

$$\boxed{\text{ア}} : 1 = 1 : t$$

であるから

$$t = \frac{1}{\boxed{\text{ア}}}, \qquad \mathrm{Q}\left(\frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ア}}}, \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{ア}}}, 0\right)$$

となる。

x 軸に垂直な平面 $x = d$ $(0 < d < 1)$ を H とする。球面 S と平面 H が交わってできる図形 C 上を点 P が動くとき，P に対応する点 Q が描く図形の方程式は

$$\left(u - \boxed{\text{エ}}\right)^2 + v^2 = \boxed{\text{オ}}$$

であり，u の最小値は $\boxed{\text{カ}}$ である。

さらに，C 上の定点 $\mathrm{P}_1(d,\ 0,\ \sqrt{1-d^2})$ に対応する xy 平面上の点を Q_1 とする。このとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{NQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{NQ_1}} = u \times \boxed{\text{キ}} + \boxed{\text{ク}}$$

であり，この内積は点 P の座標が $\left(\boxed{\text{ケ}}, \boxed{\text{コ}}, \boxed{\text{サ}}\right)$ のとき最小値 $\boxed{\text{シ}}$ をとる。

問題Ｉのア，イ，ウの解答群

ⓐ x　　ⓑ y　　ⓒ z

ⓓ $\dfrac{1}{x}$　　ⓔ $\dfrac{1}{y}$　　ⓕ $\dfrac{1}{z}$

ⓖ $1-x$　　ⓗ $1-y$　　ⓘ $1-z$

ⓙ $\dfrac{1}{1-x}$　　ⓚ $\dfrac{1}{1-y}$　　ⓛ $\dfrac{1}{1-z}$

問題Ｉのエ，オ，カ，キ，ク，ケ，コ，サ，シの解答群

ⓐ -2　　ⓑ -1　　ⓒ 0

ⓓ 1　　ⓔ 2　　ⓕ $-d$

ⓖ d　　ⓗ $\dfrac{1}{d}$　　ⓘ $\dfrac{1-d^2}{d^2}$

ⓙ $1-d^2$　　ⓚ $\sqrt{1-d^2}$　　ⓛ $-\sqrt{1-d^2}$

ⓜ $d+\dfrac{\sqrt{1-d^2}}{d}$　　ⓝ $d-\dfrac{\sqrt{1-d^2}}{d}$　　ⓞ $\dfrac{1}{d}+\dfrac{\sqrt{1-d^2}}{d}$

ⓟ $\dfrac{1}{d}-\dfrac{\sqrt{1-d^2}}{d}$　　ⓠ $\dfrac{1}{d}+\dfrac{\sqrt{1-d^2}}{d^2}$　　ⓡ $\dfrac{1}{d}-\dfrac{\sqrt{1-d^2}}{d^2}$

（設問は次のページにつづく）

II　次の問題文の空欄にもっとも適する答えを解答群から選び，その記号をマーク解答用紙にマークせよ。ただし，同じ記号を2度以上用いてもよい。(20点)

サイコロを振って数直線上にある点 R を動かす。3 または 6 の目が出た場合は R を正の方向に 2 動かし，それ以外の目が出た場合は負の方向に 1 動かす。最初に R が原点にあったとして，n 回サイコロを振った後に R が点 x にある確率を $P_n(x)$ (ただし x は整数) とおく。与えられた n に対し，$P_n(x)$，$xP_n(x)$ を最大にする x を求めてみよう。

n 回サイコロを振ったうち，3 または 6 の目が出た回数を s とすれば，R の位置は $x = 2s-(n-s) = 3s-n$ であり，$P_n(x) = \boxed{\text{ス}}$ が成り立つ。$P_n(x)$ が最大となるためには

$$\frac{P_n(x-3)}{P_n(x)} = \boxed{\text{セ}} \leqq 1, \quad \frac{P_n(x+3)}{P_n(x)} = \boxed{\text{ソ}} \leqq 1$$

が必要であり，このとき $\boxed{\text{タ}} \leqq 3s = x+n \leqq \boxed{\text{チ}}$ が成り立つ。したがって $k=1,2,3,\cdots$ に対して，$n=3k-2$ のときは $P_n(-1)$ が最大，$n=3k-1$ のときは $P_n(-2)=P_n(1)$ が最大，$n=3k$ のときは $P_n(0)$ が最大となる。

次に $xP_n(x)$ を最大にする x を求めよう。そのような $x=3s-n$ は正である。$Q_n(s)=(3s-n)\times P_n(3s-n)$ とおくと，$Q_n(s)=(3s-n)\times \boxed{\text{ス}}$ である。したがって，$s>0$, $Q_n(s)>0$ ならば

$$\frac{Q_n(s+1)}{Q_n(s)} = \boxed{\text{ツ}}$$

であり，この比が1以下になる必要十分条件は $\boxed{\text{テ}} \geqq 0$，すなわち $3s \geqq \boxed{\text{ト}}$ である。以上により，$L = \boxed{\text{ト}}$ とおくと，L が整数で 3 の倍数である場合，$Q_n(s) = xP_n(x)$ は s が $\boxed{\text{ナ}}$ のとき最大である。それ以外の場合は，s が $\boxed{\text{ニ}}$ のときが最大である。

問題 II のスの解答群

ⓐ $\dfrac{n!}{s!\,(n-s)!\,3^n}$　ⓑ $\dfrac{n!\,2^s}{s!\,(n-s)!\,3^n}$　ⓒ $\dfrac{n!\,2^{n-s}}{s!\,(n-s)!\,3^n}$　ⓓ $\dfrac{n!\,2^n}{s!\,(n-s)!\,3^n}$

問題 II のセ，ソの解答群

ⓐ $\dfrac{s}{2(n-s+1)}$　ⓑ $\dfrac{s}{2(n-s)}$　ⓒ $\dfrac{2s}{n-s}$　ⓓ $\dfrac{2s}{n-s+1}$

ⓔ $\dfrac{n-s-1}{2(s+1)}$　ⓕ $\dfrac{n-s}{2(s+1)}$　ⓖ $\dfrac{2(n-s-1)}{s+1}$　ⓗ $\dfrac{2(n-s)}{s+1}$

問題 II のタ，チの解答群

ⓐ $n-3$　ⓑ $n-2$　ⓒ $n-1$　ⓓ n　ⓔ $n+1$　ⓕ $n+2$　ⓖ $n+3$

問題 II のツの解答群

ⓐ $\dfrac{(3s-n+3)(n-s-1)}{2(3s-n)(s+1)}$　ⓑ $\dfrac{(3s-n+3)(n-s)}{2(3s-n)(s+1)}$

ⓒ $\dfrac{(3s-n+3)(n-s)}{2(3s-n)s}$　ⓓ $\dfrac{(3s-n+3)(n-s+1)}{2(3s-n)(s+1)}$

問題 II のテの解答群

ⓐ $9s^2-3(2n+3)s+(n+3)(n-2)$　ⓑ $9s^2-3(2n+1)s+(n+2)(n-3)$

ⓒ $9s^2-3(2n-1)s+(n+1)(n-4)$　ⓓ $9s^2-3(2n-3)s+n(n-5)$

問題 II のトの解答群

ⓐ $n-\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{8n+9}}{2}$　ⓑ $n-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{8n+17}}{2}$　ⓒ $n+\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{8n+25}}{2}$

問題 II のナ，ニの解答群

ⓐ $\dfrac{L}{3}$ より小さい最大の整数　ⓑ $\dfrac{L}{3}$

ⓒ $\dfrac{L}{3}$ より大きい最小の整数　ⓓ $\dfrac{L}{3}$ または $\dfrac{L}{3}+1$

（設問は次のページにつづく）

III　原点 O を中心とする半径 1 の円周上に 2 点 $\mathrm{Q}(\cos a,\ \sin a)$，$\mathrm{R}(\cos(a+b),\ \sin(a+b))$ をとる。ただし a, b は $a>0,\ b>0,\ a+b<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす。また，点 Q から x 軸へ下ろした垂線の足を点 P とし，点 R から y 軸へ下ろした垂線の足を点 S とする。$\triangle$OPQ の面積と $\triangle$ORS の面積の和を A，五角形 OPQRS の面積を B とおく。以下の問いに答えよ。(30 点)

(1)　A を a と b で表せ。

(2)　b を固定して，a を $0<a<\dfrac{\pi}{2}-b$ の範囲で動かすとき，A がとりうる値の範囲を b で表し，A が最大値をとるときの a の値を b で表せ。

(3)　B は $a=\dfrac{\pi}{8},\ b=\dfrac{\pi}{4}$ のときに最大値をとることを示せ。

（設問は次のページにつづく）

IV　$a>1$ とし，$x>0$ で定義された関数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\,a^{-\frac{1}{x}}$ に対して，曲線 $C: y=f(x)$ を考える。以下の問いに答えよ。（30 点）

(1)　$f'(x)$ を求めよ。

(2)　y が最大値をとる x の値 b を求め，曲線 C の概形をかけ。ただし，凹凸は調べなくてよい。また，必要であれば $\displaystyle\lim_{s\to\infty} s^{-2}a^s=\infty$ を用いてよい。

(3)　曲線 C の点 $\mathrm{P}(t, f(t))$ での接線 ℓ が原点 O を通るとき，t の値と ℓ の方程式を求めよ。

(4)　$t \leqq x \leqq b$ の範囲において，曲線 C と 直線 ℓ および直線 $x=b$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。ただし，b，t，ℓ は (2)，(3) で求めたものとする。

（以下計算用紙）

(計算用紙)

(計算用紙)

(計算用紙)

(計算用紙)