2019 年度入学試験問題

数　　学

（試験時間　15：20〜17：00　　100 分）

1．解答用紙には，記述解答用紙とマーク解答用紙の２種類があります。

2．解答は，必ず解答欄に記入およびマークしてください。解答欄以外への記入およびマークは無効となります。

3．解答は，ＨＢの鉛筆またはシャープペンシルを使用し，訂正する場合は，プラスチック製の消しゴムを使用してください。特に，マーク解答用紙には鉛筆のあとや消しくずを残さないでください。

4．解答用紙を折り曲げたり，汚したりしないでください。また，マーク解答用紙を記述解答用紙の下敷きに使用しないでください。

5．解答用紙には，必ず受験番号と氏名を記入およびマークしてください。

6．マーク解答用紙への受験番号の記入およびマークは，コンピュータ処理上非常に重要なので，誤記のないようにしてください。

7．一度記入したマークを修正する場合，しっかりと消してください。消し残しがあると，マーク読み取り装置が反応して解答が無効となることがあります。

8．満点が 100 点となる配点表示になっていますが，数学科は満点が 200 点であり，各問の配点は２倍となります。

141－MQ

（設問は２ページより始まる）

I　次の問題文の空欄にもっとも適する答えを解答群から選び，その記号をマーク解答用紙にマークせよ。ただし，同じ記号を2度以上用いてもよい。(15点)

n を 3 以上の自然数とし，複素数平面上に反時計回りに $\mathrm{P}_0(\alpha_0)$，$\mathrm{P}_1(\alpha_1)$，$\ldots$，$\mathrm{P}_{n-1}(\alpha_{n-1})$ を頂点とする正 n 角形をとる。この正 n 角形の中心を $\mathrm{Q}(\beta)$ とする。$\alpha_0 = 0$ とし，ある m に対し $\alpha_m = 2i$ ならば，

$$\beta = \boxed{\quad ア \quad} + \boxed{\quad イ \quad}\, i, \quad \mathrm{P}_0\mathrm{Q}\text{ の長さ} = \boxed{\quad ウ \quad}$$

であり，$k = 1, 2, \ldots, n-1$ に対して

$$\alpha_k = \beta + \boxed{\quad ウ \quad} \times \left(\cos \boxed{\quad エ \quad} + i \sin \boxed{\quad エ \quad}\right)$$

である。

問題Ⅰのア，イ，ウの解答群

ⓐ 0　　ⓑ 1　　ⓒ -1

ⓓ 2　　ⓔ -2　　ⓕ n

ⓖ $-n$　　ⓗ $\sin\dfrac{m}{n}\pi$　　ⓘ $\left(\sin\dfrac{m}{n}\pi\right)^{-1}$

ⓙ $\cos\dfrac{m}{n}\pi$　　ⓚ $-\cos\dfrac{m}{n}\pi$　　ⓛ $\left(\cos\dfrac{m}{n}\pi\right)^{-1}$

ⓜ $\tan\dfrac{m}{n}\pi$　　ⓝ $\left(\tan\dfrac{m}{n}\pi\right)^{-1}$　　ⓞ $\tan\left(\dfrac{m}{n}-\dfrac{1}{2}\right)\pi$

問題Ⅰのエの解答群

ⓐ $(m-k)\dfrac{\pi}{n}$　　ⓑ $(k-m)\dfrac{\pi}{n}$　　ⓒ $(2m-k)\dfrac{\pi}{n}$　　ⓓ $(k-2m)\dfrac{\pi}{n}$

ⓔ $(m-2k)\dfrac{\pi}{n}$　　ⓕ $(2k-m)\dfrac{\pi}{n}$　　ⓖ $2(m-k)\dfrac{\pi}{n}$　　ⓗ $2(k-m)\dfrac{\pi}{n}$

（設問は次のページにつづく）

II　次の問題文の空欄にもっとも適する答えを解答群から選び，その記号をマーク解答用紙にマークせよ。ただし，同じ記号を2度以上用いてもよい。(25 点)

a を正の実数とする。直線 ℓ : $y = a(x+1)+2$ は，a の値によらず定点 $(-1, 2)$ を通る。直線 ℓ と曲線 C : $y = -\dfrac{1}{x}$ $(x<0)$ は異なる2点で交わり，それらの x 座標 α, β $(\alpha < \beta < 0)$ は，方程式 $a(x+1)+2 = -\dfrac{1}{x}$ の解である。したがって，

$$\alpha + \beta = \boxed{\quad オ \quad}, \qquad \alpha\beta = \boxed{\quad カ \quad}$$

である。

直線 ℓ と曲線 C で囲まれた部分の面積 $S(a)$ を計算すると

$$S(a) = \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ ax + (a+2) + \frac{1}{x} \right\} dx = \frac{a}{2}(\beta^2 - \alpha^2) + (a+2)(\beta - \alpha) + \boxed{\quad キ \quad}$$

となる。α と β はそれぞれ a の関数として微分可能であるから，$S(a)$ は a の関数として微分可能である。その導関数 $S'(a)$ は α, β のみを用いて

$$S'(a) = \boxed{\quad ク \quad}$$

と表せる。ここで $\alpha \fallingdotseq \beta$ に注意すると，$S'(a) = 0$ を満たすのは $a = \boxed{\quad ケ \quad}$ のときに限る。

$S(a)$ を a のみを用いて表すと

$$S(a) = \boxed{\quad コ \quad} + \log \boxed{\quad サ \quad}$$

となり，

$$\lim_{a \to +0} S(a) = \infty, \qquad \lim_{a \to \infty} S(a) = \infty$$

がわかる。したがって $S(a)$ $(a > 0)$ には最小値があり，その値は $\boxed{\quad シ \quad}$ である。

問題 II のオ，カ，コ，サの解答群

ⓐ 1　ⓑ -1　ⓒ $\dfrac{1}{a}$

ⓓ $-\dfrac{1}{a}$　ⓔ $\dfrac{2}{a}$　ⓕ $-\dfrac{2}{a}$

ⓖ $1+\dfrac{2}{a}$　ⓗ $-\left(1+\dfrac{2}{a}\right)$　ⓘ $a+2$

ⓙ $-(a+2)$　ⓚ $\dfrac{a+2}{2}\sqrt{a^2+4}$　ⓛ $\dfrac{a+2}{2a}\sqrt{a^2+4}$

ⓜ $\dfrac{a+2}{2a^2}\sqrt{a^2+4}$　ⓝ $\dfrac{2a}{a+2-\sqrt{a^2+4}}$　ⓞ $\dfrac{2a}{a+2+\sqrt{a^2+4}}$

ⓟ $\dfrac{a+2-\sqrt{a^2+4}}{a+2+\sqrt{a^2+4}}$　ⓠ $\dfrac{a+2+\sqrt{a^2+4}}{a+2-\sqrt{a^2+4}}$

問題 II のキ，クの解答群

ⓐ $\log\alpha\beta$　ⓑ $\log\dfrac{1}{\alpha\beta}$　ⓒ $\log\dfrac{\alpha}{\beta}$

ⓓ $\log\dfrac{\beta}{\alpha}$　ⓔ $\log(-\alpha-\beta)$　ⓕ $\log(\beta-\alpha)$

ⓖ $(\alpha+\beta+1)(\beta-\alpha)$　ⓗ $\dfrac{1}{2}(\alpha+\beta+1)(\beta-\alpha)$　ⓘ $(\alpha+\beta+2)(\beta-\alpha)$

ⓙ $\dfrac{1}{2}(\alpha+\beta+2)(\beta-\alpha)$

問題 II のケ，シの解答群

ⓐ $\sqrt{2}-1$　ⓑ $2-\sqrt{2}$　ⓒ 1

ⓓ $\sqrt{2}$　ⓔ 2　ⓕ $2\sqrt{2}$

ⓖ $4\sqrt{2}+2\log(\sqrt{2}-1)$　ⓗ $2\sqrt{2}+2\log(\sqrt{2}-1)$　ⓘ $2\sqrt{2}+\log(2-\sqrt{2})$

ⓙ $2\sqrt{2}+\log(\sqrt{2}-1)$

（設問は次のページにつづく）

III　O を原点とする平面上の動点 R が $R_0(1,0)$ から出発して，単位円の周上を 1 秒ごとに反時計回りに移動する。移動するときの動径 OR の回転角は，確率 $\frac{1}{2}$ で $\frac{\pi}{6}$，確率 $\frac{1}{2}$ で $\frac{\pi}{3}$ である。n 秒後の R の位置を R_n とする。以下の問いに答えよ。(30 点)

(1)　R_5 が $(-1,0)$ である確率を求めよ。

(2)　R_9 が x 軸上にある確率を求めよ。

次に，R_n が x 軸上または y 軸上にある確率を p_n $(n \geqq 1)$ とする。

(3)　p_{n+1} を p_n を用いて表せ。

(4)　p_n を求めよ。

（設問は次のページにつづく）

IV 定積分により実数列 $a_n = \int_{-1}^{0} x^n e^x \, dx$ を定める $(n = 1, 2, 3, \ldots)$。ただし e は自然対数の底である。以下の問いに答えよ。(30 点)

(1) $\dfrac{1}{e(n+1)} < |a_n| < \dfrac{1}{n+1}$ が成り立つことを示せ。

(2) a_{n+1} を a_n を用いて表せ。

(3) 自然数 n に対して

$$n!\,e = n! + \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \cdots + \frac{n!}{n!} + (-1)^n e a_n \qquad \cdots\cdots (*)$$

すなわち

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + (-1)^n e \int_{-1}^{0} \frac{x^n}{n!} e^x \, dx$$

が成り立つことを，n に関する数学的帰納法により示せ。

以上の結果を使うと，$e = 2.71828\cdots$ は無理数であることが，次の問いからわかる。

(4) 「ある自然数 p と q により $e = \dfrac{p}{q}$ と表される」と仮定すれば矛盾が生じることを，$n = q$ の場合の (1) の不等式と $(*)$ を用いて示せ。

(以下計算用紙)

(計算用紙)

（計算用紙）

（計算用紙）

(計算用紙)