2014 年度入学試験問題

数　学

（試験時間　15：20～17：00　100 分）

1．解答用紙は，記述解答用紙とマーク解答用紙の 2 種類がありますので注意してください。

2．解答は，必ず解答欄に記入してください。なお，解答欄以外に書くと無効となりますので注意してください。

3．解答は，ＨＢの鉛筆またはシャープペンシルを使用し，訂正する場合は，プラスチック製の消しゴムを使用してください。特に，マーク解答用紙には鉛筆のあとや消しくずを残さないでください。また，折りまげたり，汚したりしないでください。記述解答用紙の下敷きにマーク解答用紙を使用することは絶対にさけてください。

4．解答用紙には，受験番号と氏名を必ず記入してください。

5．マーク解答用紙の受験番号および受験番号のマーク記入は，コンピュータ処理上非常に重要なので，誤記のないよう特に注意してください。

6．設問文にある点数は，満点が 100 点となるような配点表示になっていますが，数学科は満点が 200 点であり，各問の配点は 2 倍になります。

(設問は２ページより始まる。)

I　次の問題文の空欄にもっとも適する答えを解答群から選び，その記号をマーク解答用紙にマークせよ。ただし，同じ記号を2度以上用いてもよい。(20点)

動点Aは正三角形PQRの頂点を移動する。各回の移動の際に，動点Aはその時いる頂点から他の2つの頂点のどちらかに，それぞれ $\frac{1}{2}$ の確率で移動する。動点Aが点Pを出発して，n 回移動した後に点Pにいる確率を p_n，点Qにいる確率を q_n とおく。このとき，点Rにいる確率も q_n となる。例えば $n=1,2$ の場合，$p_1=0$，$q_1=\frac{1}{2}$ であり，$p_2=$ $\boxed{\text{ア}}$，$q_2=$ $\boxed{\text{イ}}$ である。一般の自然数 n に対して p_n を求めよう。p_{n+1}，q_{n+1} はそれぞれ p_n，q_n を用いて $p_{n+1}=$ $\boxed{\text{ウ}}$，$q_{n+1}=$ $\boxed{\text{エ}}$ と表される。$s_n=p_n-q_n$ とおき，数列 $\{s_n\}$ が満たす漸化式を利用して一般項を求めると，$s_n=$ $\boxed{\text{オ}}$ となる。また，n 回移動した後に，動点Aが各頂点にいる確率の和は1であるから，$p_n=$ $\boxed{\text{カ}}$ がわかる。

一方，数直線上の動点Bは原点を出発し，整数を座標とする点を移動する。各回の移動の際に，動点Bはその時いる座標 m の点から座標 $m-1$，$m+1$ の2点のどちらかに，それぞれ $\frac{1}{2}$ の確率で移動する。動点Bが正負どちらの向きに何回動くかを考えることにより，Bが n 回移動後に座標 $n-2k$ (ただし，$k=0,1,2,\ldots,n$) の点にいる確率を求めると，$\boxed{\text{キ}}$ となる。

さて，動点Bが $3n$ 回移動後に3の倍数を座標とする点にいる確率は，動点Aが $3n$ 回移動後に点Pにいる確率 p_{3n} に等しい。よって，等式 $\boxed{\text{ク}}$ が導かれる。

問題Iのア，イの解答群

ⓐ 0　ⓑ $\frac{1}{8}$　ⓒ $\frac{5}{32}$　ⓓ $\frac{3}{16}$　ⓔ $\frac{1}{4}$　ⓕ $\frac{5}{16}$

ⓖ $\frac{3}{8}$　ⓗ $\frac{1}{2}$　ⓘ $\frac{5}{8}$　ⓙ $\frac{3}{4}$　ⓚ 1

問題Ⅰのウ，エの解答群

ⓐ p_n　ⓑ q_n　ⓒ $\dfrac{p_n}{2}$　ⓓ $\dfrac{q_n}{2}$　ⓔ $\dfrac{p_n+q_n}{2}$

ⓕ $\dfrac{p_n-q_n}{2}$　ⓖ $\dfrac{q_n-p_n}{2}$　ⓗ $\dfrac{p_n+q_n}{3}$　ⓘ $\dfrac{2p_n+q_n}{3}$　ⓙ $\dfrac{p_n+2q_n}{3}$

問題Ⅰの オ の解答群

ⓐ $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$　ⓑ $-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$　ⓒ $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$　ⓓ $-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

ⓔ $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}$　ⓕ $-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}$　ⓖ $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n}$　ⓗ $-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n}$

問題Ⅰの カ の解答群

ⓐ $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$　ⓑ $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}$　ⓒ $\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

ⓓ $\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}$　ⓔ $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$　ⓕ $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n}$

ⓖ $\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$　ⓗ $\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n}$

問題Ⅰの キ の解答群

ⓐ $\dfrac{{}_{n-1}C_k}{2^{n-1}}$　ⓑ $\dfrac{{}_{n-1}C_{2k}}{2^{n-1}}$　ⓒ $\dfrac{{}_{n}C_k}{2^{n-1}}$

ⓓ $\dfrac{{}_{n}C_{2k}}{2^{n-1}}$　ⓔ $\dfrac{{}_{n}C_k}{2^{n}}$　ⓕ $\dfrac{{}_{n}C_{2k}}{2^{n}}$

問題Ⅰの ク の解答群　（下記の N は $N \leqq \dfrac{n}{2} < N+1$ を満たす整数を表す。）

ⓐ $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} {}_{3n}C_{3i} = \frac{-(-2)^{3n}-2}{3}$　ⓑ $\displaystyle\sum_{i=0}^{N} {}_{3n}C_{6i} = \frac{2^{3n-3}-2(-1)^{3n}}{3}$

ⓒ $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} {}_{3n}C_{3i} = \frac{2^{3n}-10(-1)^{3n}}{9}$　ⓓ $\displaystyle\sum_{i=0}^{N} {}_{3n}C_{6i} = \frac{(-2)^{3n-3}+2}{3}$

ⓔ $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} {}_{3n}C_{3i} = \frac{2^{3n}+2(-1)^{3n}}{3}$　ⓕ $\displaystyle\sum_{i=0}^{N} {}_{3n}C_{6i} = \frac{-(-2)^{3n-3}+10}{9}$

(設問は次ページに続く。)

II　次の問題文の空欄にもっとも適する答えを解答群から選び，その記号をマーク解答用紙にマークせよ。ただし，同じ記号を2度以上用いてもよい。(20点)

座標平面上で $O(0,0)$，$A(2,0)$，$B(2,1)$，$C(0,1)$ とする。線分 CB 上に点 $P(t,1)$ $(0 \leqq t \leqq 2)$ をとり，線分 OP の垂直二等分線を ℓ とする。

ℓ の方程式を $y = px + q$ とする。p，q をそれぞれ t で表すと，$p = \boxed{\text{ケ}}$，$q = \boxed{\text{コ}}$ である。ℓ が点 A を通るときの t の値を α とすると，$\alpha = \boxed{\text{サ}}$ であり，ℓ が点 C を通るときの t の値は 1 である。

長方形 OABC は直線 ℓ により 2 つの部分に分けられるが，そのうち原点 O を含む方の面積を S とする。

(1) $0 \leqq t \leqq \alpha$ のとき

直線 ℓ は線分 OC および線分 AB と共有点をもつ。S を t で表すと，$S = \boxed{\text{シ}}$ である。したがって，S は $0 \leqq t \leqq \alpha$ において単調に減少する。

(2) $\alpha \leqq t \leqq 1$ のとき

直線 ℓ は線分 OA および線分 OC と共有点をもち，$S = \boxed{\text{ス}}$ である。

(3) $1 \leqq t \leqq 2$ のとき

直線 ℓ は線分 OA および線分 CB と共有点をもち，$S = \dfrac{t}{2}$ となる。

以上をもとに，$0 \leqq t \leqq 2$ における S の最小値 m を求めると，$m = \boxed{\text{セ}}$ である。

問題 II のケ，コの解答群

ⓐ 1　ⓑ -1　ⓒ $\frac{1}{2}$　ⓓ $-\frac{1}{2}$　ⓔ t

ⓕ $-t$　ⓖ $\frac{t}{2}$　ⓗ $-\frac{t}{2}$　ⓘ $\frac{1}{t}$　ⓙ $-\frac{1}{t}$

ⓚ $\frac{1}{2t}$　ⓛ $-\frac{1}{2t}$　ⓜ $t+1$　ⓝ $t-1$　ⓞ $\frac{t+1}{2}$

ⓟ $\frac{t-1}{2}$　ⓠ t^2+1　ⓡ t^2-1　ⓢ $\frac{t^2+1}{2}$　ⓣ $\frac{t^2-1}{2}$

問題 II の サ の解答群

ⓐ 1　ⓑ $\sqrt{3}$　ⓒ $\frac{1}{2}$　ⓓ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

ⓔ $-1+\sqrt{3}$　ⓕ $2-\sqrt{3}$　ⓖ $-2+2\sqrt{3}$　ⓗ $3-\sqrt{3}$

ⓘ $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$　ⓙ $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$　ⓚ $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$　ⓛ $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

問題 II のシ，スの解答群

ⓐ $\frac{t^2}{2}$　ⓑ t^2　ⓒ $2t^2$

ⓓ $\frac{(t-1)^2}{2}$　ⓔ $(t-1)^2$　ⓕ $2(t-1)^2$

ⓖ $\frac{t^2-2t+2}{2}$　ⓗ t^2-2t+2　ⓘ $2(t^2-2t+2)$

ⓙ $\frac{t^2+1}{4t}$　ⓚ $\frac{(t^2+1)^2}{4t}$　ⓛ $\frac{t(t^2+1)}{4}$　ⓜ $\frac{t\,(t^2+1)^2}{4}$

ⓝ $\frac{t^2+1}{8t}$　ⓞ $\frac{(t^2+1)^2}{8t}$　ⓟ $\frac{t(t^2+1)}{8}$　ⓠ $\frac{t\,(t^2+1)^2}{8}$

問題 II の セ の解答群

ⓐ $\frac{1}{3}$　ⓑ $\frac{2}{3}$　ⓒ $\frac{1}{9}$　ⓓ $\frac{2}{9}$

ⓔ $\frac{\sqrt{2}}{3}$　ⓕ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$　ⓖ $\frac{\sqrt{2}}{9}$　ⓗ $\frac{2\sqrt{2}}{9}$

ⓘ $\frac{\sqrt{3}}{3}$　ⓙ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　ⓚ $\frac{\sqrt{3}}{9}$　ⓛ $\frac{2\sqrt{3}}{9}$

ⓜ $\frac{\sqrt{6}}{3}$　ⓝ $\frac{2\sqrt{6}}{3}$　ⓞ $\frac{\sqrt{6}}{9}$　ⓟ $\frac{2\sqrt{6}}{9}$

（設問は次ページに続く。）

III　a, b を定数とし，4 次関数 $f(x)$ を次のように定める。

$$f(x) = x^4 - \frac{4}{3}x^3 + a\left(\frac{4}{3}x^3 - 2x^2\right) + 2b\left(x^2 - 2x\right)$$

以下の問いに答えよ。(30 点)

(1) 方程式 $f'(x) = 0$ が相異なる 3 つの実数解をもつための a, b の条件を求めよ。

(2) 関数 $f(x)$ が極値をとる x の値がただ 1 つであるための a, b の条件を求め，その条件が表す図形を ab 平面上に図示せよ。

(3) a, b が (2) で求めた条件をみたすとき，$f(x)$ が極値をとる x の値を求めよ。ただし，x の値を表すのに必要ならば a を用いてよい。また，極値は求めなくてよい。

（設問は次ページに続く。）

IV　関数

$$G(x) = \int_x^{x+1} t \log(t+1)\, dt \qquad (x > -1)$$

について，以下の問いに答えよ。(30 点)

(1) 不定積分 $\displaystyle\int t \log(t+1)\, dt$ を求め，$G(x)$ を求めよ。

(2) 導関数 $G'(x)$ は $x > -1$ で増加することを示せ。

(3) $G(x)$ が最小となる x がただ 1 つ存在し，$-\dfrac{1}{2} < x < 0$ の範囲にあることを示せ。

(4) $G\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ を求め，$G(x)$ の最小値は $\dfrac{1}{8}$ より小さいことを示せ。必要ならば，$2 < e < 3$ であることを用いてよい。

（以下計算用紙）

（計算用紙）

(計算用紙)

（計算用紙）

(計算用紙)