2018 年 度 入 学 試 験 問 題

数　　　学

（試験時間　15：20～17：00　100 分）

1．解答用紙には，記述解答用紙とマーク解答用紙の 2 種類がありますので注意してください。

2．解答は，必ず解答欄に記入およびマークしてください。解答欄以外への記入およびマークは無効となりますので注意してください。

3．解答は，ＨＢの鉛筆またはシャープペンシルを使用し，訂正する場合は，プラスチック製の消しゴムを使用してください。特に，マーク解答用紙には鉛筆のあとや消しくずを残さないでください。

4．解答用紙を折り曲げたり，汚したりしないでください。また，マーク解答用紙を記述解答用紙の下敷きに使用しないでください。

5．解答用紙には，必ず受験番号と氏名を記入およびマークしてください。

6．マーク解答用紙への受験番号の記入およびマークは，コンピュータ処理上非常に重要なので，誤記のないよう特に注意してください。

7．満点が 100 点となる配点表示になっていますが，数学科は満点が 200 点であり，各問の配点は 2 倍となります。

（設問は２ページより始まる）

I　次の問題文の空欄にもっとも適する答えを解答群から選び，その記号をマーク解答用紙にマークせよ。ただし，同じ記号を2度以上用いてもよい。(20点)

Oを原点とする座標空間において，6個の点

$$\mathrm{A}(0,0,1),\quad \mathrm{B}(1,0,0),\quad \mathrm{C}(0,1,0),\quad \mathrm{D}(-1,0,0),\quad \mathrm{E}(0,-1,0),\quad \mathrm{F}(0,0,-1)$$

を頂点とする正八面体を考える。△ABCの重心をG，△ACDの重心をHとすると，線分OGの長さは $\boxed{\text{ア}}$ であり，$\cos\angle\mathrm{GOH} = \boxed{\text{イ}}$ である。また，正八面体ABCDEFの各面の重心を頂点とする正多面体は $\boxed{\text{ウ}}$ である。

次に，この正八面体を回転と平行移動によって空間の中で動かし，頂点A，B，C，D，E，Fがそれぞれ点A′，B′，C′，D′，E′，F′に，GがG′に移ったとする。ただし，移動後の正八面体A′B′C′D′E′F′は以下の3条件を満たすものとする。

(1) 点G′は原点Oである。

(2) 3頂点A′，B′，C′の z 座標は0である。A′は y 座標も0で，x 座標は正である。

(3) 3頂点D′，E′，F′の z 座標はすべて正である。

このとき，3点D′，E′，F′の座標は，それぞれ

$$\mathrm{D}'\left(\boxed{\text{エ}}, \boxed{\text{オ}}, \boxed{\text{カ}}\right),$$
$$\mathrm{E}'\left(\boxed{\text{エ}}, \boxed{\text{キ}}, \boxed{\text{カ}}\right),$$
$$\mathrm{F}'\left(\boxed{\text{ク}}, 0, \boxed{\text{カ}}\right)$$

である。正八面体A′B′C′D′E′F′を真上の z 軸方向から見ると，その輪郭は正六角形であり，x 軸方向から見た輪郭は $\boxed{\text{ケ}}$，y 軸方向から見た輪郭は $\boxed{\text{コ}}$ である。

問題Ⅰのア，イ，エ，オ，カ，キ，クの解答群

ⓐ $-\sqrt{2}$　ⓑ $-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$　ⓒ -1　ⓓ $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　ⓔ $-\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

ⓕ $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　ⓖ $-\dfrac{2}{3}$　ⓗ $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　ⓘ $-\dfrac{1}{2}$　ⓙ $-\dfrac{1}{\sqrt{6}}$

ⓚ $-\dfrac{1}{3}$　ⓛ 0　ⓜ $\dfrac{1}{3}$　ⓝ $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$　ⓞ $\dfrac{1}{2}$

ⓟ $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　ⓠ $\dfrac{2}{3}$　ⓡ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　ⓢ $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$　ⓣ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ⓤ 1　ⓥ $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$　ⓦ $\sqrt{2}$

問題Ⅰのウの解答群

ⓐ 正四面体　ⓑ 正六面体　ⓒ 正八面体　ⓓ 正十二面体

ⓔ 正二十面体

問題Ⅰのケ，コの解答群

ⓐ 正三角形　ⓑ 直角二等辺三角形　ⓒ 正方形

ⓓ 正方形でない長方形　ⓔ 正方形でないひし形　ⓕ 正六角形

ⓖ 正六角形でない六角形　ⓗ 正八角形

(設問は次のページにつづく)

II　次の問題文の空欄にもっとも適する答えを解答群から選び，その記号をマーク解答用紙にマークせよ。ただし，同じ記号を 2 度以上用いてもよい。(20 点)

自然数 n を限りなく大きくするとき，定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos n\pi x}{1+x}\,dx$ と $\displaystyle\int_0^1 \frac{|\cos n\pi x|}{1+x}\,dx$ がどのような値に近づくかを調べる。まず，部分積分法を用いると

$$\int_0^1 \frac{\cos n\pi x}{1+x}\,dx = \boxed{\quad サ \quad}\int_0^1 \frac{\boxed{\quad シ \quad}}{(1+x)^2}\,dx$$

である。右辺の絶対値について，被積分関数の絶対値は 1 以下であるから，

$$\boxed{\quad サ \quad}\left|\int_0^1 \frac{\boxed{\quad シ \quad}}{(1+x)^2}\,dx\right| \leqq \boxed{\quad サ \quad}$$

が成り立ち，

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{\cos n\pi x}{1+x}\,dx = \boxed{\quad ス \quad}$$

が得られる。

次に，$k = 1, 2, \ldots, n$ とする。$\dfrac{k-1}{n} \leqq x \leqq \dfrac{k}{n}$ のとき

$$\frac{|\cos n\pi x|}{1+\frac{k}{n}} \leqq \frac{|\cos n\pi x|}{1+x} \leqq \frac{|\cos n\pi x|}{1+\frac{k-1}{n}} \qquad \cdots\cdots \text{①}$$

である。ここで，

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} |\cos n\pi x|\,dx = \boxed{\quad セ \quad}$$

であるから，① の各辺を $x = \dfrac{k-1}{n}$ から $x = \dfrac{k}{n}$ まで積分し，k について 1 から n までの和をとれば，

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\boxed{\quad セ \quad}}{1+\frac{k}{n}} \leqq \int_0^1 \frac{|\cos n\pi x|}{1+x}\,dx \leqq \sum_{k=1}^{n} \frac{\boxed{\quad セ \quad}}{1+\frac{k-1}{n}} \qquad \cdots\cdots \text{②}$$

が成り立つ。② において $n \to \infty$ とすると，左辺と右辺はともに

$$\int_0^1 \boxed{\quad ソ \quad}\,dx$$

に収束する。この値を計算して

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{|\cos n\pi x|}{1+x}\,dx = \boxed{\quad タ \quad}$$

が得られる。

問題 II のサ，セの解答群

ⓐ $\frac{1}{2n}$　ⓑ $\frac{1}{n}$　ⓒ $\frac{2}{n}$　ⓓ $\frac{1}{2}$　ⓔ 1　ⓕ 2

ⓖ $\frac{1}{2\pi}$　ⓗ $\frac{1}{\pi}$　ⓘ $\frac{2}{\pi}$　ⓙ $\frac{\pi}{2}$　ⓚ π　ⓛ 2π

ⓜ $\frac{1}{2n\pi}$　ⓝ $\frac{1}{n\pi}$　ⓞ $\frac{2}{n\pi}$　ⓟ $\frac{n\pi}{2}$　ⓠ $n\pi$　ⓡ $2n\pi$

問題 II のシの解答群

ⓐ $\sin n\pi x$　ⓑ $-\sin n\pi x$　ⓒ $\cos n\pi x$　ⓓ $-\cos n\pi x$

ⓔ $x\sin n\pi x$　ⓕ $-x\sin n\pi x$　ⓖ $x\cos n\pi x$　ⓗ $-x\cos n\pi x$

問題 II のス，タの解答群

ⓐ 0　ⓑ 1　ⓒ $\frac{\log 2}{2}$　ⓓ $\log 2$

ⓔ $2\log 2$　ⓕ $\frac{\log 2}{2\pi}$　ⓖ $\frac{\log 2}{\pi}$　ⓗ $\frac{2\log 2}{\pi}$

ⓘ $\frac{\pi\log 2}{2}$　ⓙ $\pi\log 2$　ⓚ $2\pi\log 2$　ⓛ $\frac{1-\log 2}{2}$

ⓜ $1-\log 2$　ⓝ $2(1-\log 2)$　ⓞ $\frac{1-\log 2}{2\pi}$　ⓟ $\frac{1-\log 2}{\pi}$

ⓠ $\frac{2(1-\log 2)}{\pi}$　ⓡ $\frac{\pi(1-\log 2)}{2}$　ⓢ $\pi(1-\log 2)$　ⓣ $2\pi(1-\log 2)$

ⓤ ∞

問題 II のソの解答群

ⓐ $\frac{1}{2(1+x)}$　ⓑ $\frac{1}{1+x}$　ⓒ $\frac{2}{1+x}$　ⓓ $\frac{1}{2\pi(1+x)}$

ⓔ $\frac{1}{\pi(1+x)}$　ⓕ $\frac{2}{\pi(1+x)}$　ⓖ $\frac{\pi}{2(1+x)}$　ⓗ $\frac{\pi}{1+x}$

ⓘ $\frac{2\pi}{1+x}$　ⓙ $\frac{x}{2(1+x)}$　ⓚ $\frac{x}{1+x}$　ⓛ $\frac{2x}{1+x}$

ⓜ $\frac{x}{2\pi(1+x)}$　ⓝ $\frac{x}{\pi(1+x)}$　ⓞ $\frac{2x}{\pi(1+x)}$　ⓟ $\frac{\pi x}{2(1+x)}$

ⓠ $\frac{\pi x}{1+x}$　ⓡ $\frac{2\pi x}{1+x}$

（設問は次のページにつづく）

III　O を原点とする座標平面において，3 次関数 $y = x^3 - 3x$ のグラフを C とする。C 上の点 $\mathrm{P}(a, a^3 - 3a)$ を通り，傾き k の直線を ℓ とする。ただし，a は $a > 1$ を満たす定数である。以下の問いに答えよ。(30 点)

(1)　C と ℓ が相異なる 3 点で交わるための k の条件を求めよ。

(2)　C と ℓ が相異なる 3 点で交わり，さらに P 以外の交点 $\mathrm{Q}(x_1, y_1)$，$\mathrm{R}(x_2, y_2)$ (ただし $x_1 < x_2$) の x 座標 x_1，x_2 がともに負になるような k の値の範囲を求めよ。

以下では $a = \sqrt{3}$ とし，k は (2) で求めた範囲を動くものとする。

(3)　$\triangle\mathrm{OQR}$ の面積 S を k で表せ。

(4)　S の最大値を求めよ。

（設問は次のページにつづく）

IV $f(x) = e^x$ とする。以下の問いに答えよ。(30 点)

(1) a を実数とする。2 次関数 $g(x) = Ax^2 + Bx + C$ が

$$g(a) = f(a), \qquad g'(a) = f'(a), \qquad g''(a) = f''(a)$$

をすべて満たすとき，A，B，C を a で表せ。

(2) 一般に，放物線 $y = Ax^2 + Bx + C$ の焦点 F の座標は $\left(-\dfrac{B}{2A}, \dfrac{1-B^2}{4A} + C\right)$ で与えられる。A，B，C を (1) で求めたとおりとするとき，放物線 $y = Ax^2 + Bx + C$ の焦点 F の座標を a で表せ。

(3) (2) で求めた焦点 F と点 R (a, e^a) を結ぶ線分 FR の傾きが $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ となる a の値を p とし，FR の傾きが 0 となる a の値を q とする。p と q を求めよ。

(4) p と q を (3) のとおりとする。a が $p \leqq a \leqq q$ の範囲を動くとき，焦点 F が描く曲線の長さを求めよ。

（以下計算用紙）

(計算用紙)

（計算用紙）

（計算用紙）

（計算用紙）