2011 年 度 入 学 試 験 問 題

数　　学

（試験時間　15：20～17：00　100 分）

1．解答用紙は，記述解答用紙とマーク解答用紙の 2 種類がありますので注意してください。

2．解答は，必ず解答欄に記入してください。なお，解答欄以外に書くと無効となりますので注意してください。

3．解答は，ＨＢの鉛筆またはシャープペンシルを使用し，訂正する場合は，プラスチック製の消しゴムを使用してください。特に，マーク解答用紙には鉛筆のあとや消しくずを残さないでください。また，折りまげたり，汚したりしないでください。記述解答用紙の下敷きにマーク解答用紙を使用することは絶対にさけてください。

4．解答用紙には，受験番号と氏名を必ず記入してください。

5．マーク解答用紙の受験番号および受験番号のマーク記入は，電算処理上非常に重要なので，誤記のないよう特に注意してください。

6．設問文にある点数は，満点が 100 点となるような配点表示になっていますが，数学科は満点が 200 点であり，各問の配点は 2 倍になります。

I　次の問題文の空欄にもっとも適する答えを解答群から選び，その記号をマーク解答用紙にマークせよ。ただし，同じ記号を2度以上用いてもよい。(20点)

実数 x に対して，$n \leqq x$ を満たす最大の整数 n を $[x]$ で表す。この記号 $[\ \ ]$ をガウス記号という。例えば，$[2]=2$，$\left[\dfrac{3}{2}\right]=1$，$[\pi]=3$ などである。自然数 m，n に対し，$1, 2, \cdots, n$ の中にある m の倍数の個数は，ガウス記号を用いて $\boxed{\quad ア \quad}$ と表される。

次に，素数 p と自然数 n に対し，p^k が $n!$ を割り切るような最大の整数 k を $d_p(n)$ で表す。例えば，$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$ だから $d_2(3)=1$ であり，$6! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6$ だから $d_2(6)=4$，$d_3(6)=2$ である。同様に $d_2(11) = \boxed{\quad イ \quad}$ である。

さて，与えられた素数 p と自然数 n に対し，整数 r を $p^r \leqq n < p^{r+1}$ を満たすようにとる。$1, 2, \cdots, n$ の中にある

$$p \text{ の倍数の個数}, \quad p^2 \text{ の倍数の個数}, \quad \cdots \quad , \quad p^r \text{ の倍数の個数}$$

を考えることにより，$d_p(n)$ はガウス記号を用いて

$$d_p(n) = \sum_{\ell=1}^{r} \boxed{\quad ウ \quad}$$

と表される。なお，$\ell > r$ のときは $\boxed{\quad ウ \quad} = 0$ であるから，整数 R が $R \geqq r$ を満たすとき，$d_p(n) = \displaystyle\sum_{\ell=1}^{R} \boxed{\quad ウ \quad}$ と表すこともできる。

特に $n = p^r$ のときは，$\ell = 1, 2, \cdots, r$ に対して $\boxed{\quad ウ \quad} = p^{r-\ell}$ であるから

$$d_p(p^r) = \boxed{\quad エ \quad}$$

である。

また整数 q が，p の倍数でなく $1 \leqq q < p^r$ の範囲にあるとする。このとき，$\ell = 1, 2, \cdots, r-1$ に対して

$$\left[\frac{q}{p^\ell}\right] + \left[\frac{p^r - q}{p^\ell}\right] = \left[\frac{q}{p^\ell}\right] + \left[p^{r-\ell} - \frac{q}{p^\ell}\right] = p^{r-\ell} - \boxed{\quad オ \quad}$$

となり，

$$d_p(q) + d_p(p^r - q) = \boxed{\quad カ \quad}$$

が成り立つ。

問題Ⅰのアの解答群

ⓐ $\left[\dfrac{n}{m}\right]-1$　ⓑ $\left[\dfrac{n}{m}\right]$　ⓒ $\left[\dfrac{n}{m}\right]+1$

ⓓ $\left[\dfrac{n+1}{m}\right]-1$　ⓔ $\left[\dfrac{n+1}{m}\right]$　ⓕ $\left[\dfrac{n+1}{m}\right]+1$

ⓖ $\left[\dfrac{n}{m+1}\right]-1$　ⓗ $\left[\dfrac{n}{m+1}\right]$　ⓘ $\left[\dfrac{n}{m+1}\right]+1$

問題Ⅰのイ，オの解答群

ⓐ 0　ⓑ 1　ⓒ 2　ⓓ 3　ⓔ 4　ⓕ 5

ⓖ 6　ⓗ 7　ⓘ 8　ⓙ 9　ⓚ 10　ⓛ 11

問題Ⅰのウの解答群

ⓐ $\left[\dfrac{n}{p^{\ell-1}}\right]-1$　ⓑ $\left[\dfrac{n}{p^{\ell-1}}\right]$　ⓒ $\left[\dfrac{n}{p^{\ell-1}}\right]+1$　ⓓ $\left[\dfrac{n}{p^{\ell-1}}\right]-\left[\dfrac{n}{p^{\ell}}\right]$

ⓔ $\left[\dfrac{n}{p^{\ell}}\right]-1$　ⓕ $\left[\dfrac{n}{p^{\ell}}\right]$　ⓖ $\left[\dfrac{n}{p^{\ell}}\right]+1$　ⓗ $\left[\dfrac{n}{p^{\ell}}\right]-\left[\dfrac{n}{p^{\ell+1}}\right]$

ⓘ $(\ell-1)\left[\dfrac{n}{p^{\ell-1}}\right]$　ⓙ $\ell\left[\dfrac{n}{p^{\ell}}\right]$

問題Ⅰのエ，カの解答群

ⓐ $\dfrac{p^r-1}{p-1}$　ⓑ $\dfrac{p^r-1}{p-1}-r$　ⓒ $\dfrac{p^r-1}{p-1}-2r$

ⓓ $\dfrac{p^r-1}{p-1}-(r-1)$　ⓔ $\dfrac{p^r-1}{p-1}-2(r-1)$

ⓕ $\dfrac{p^{r+1}-1}{p-1}$　ⓖ $\dfrac{p^{r+1}-1}{p-1}-r$　ⓗ $\dfrac{p^{r+1}-1}{p-1}-2r$

ⓘ $\dfrac{p^{r+1}-1}{p-1}-(r-1)$　ⓙ $\dfrac{p^{r+1}-1}{p-1}-2(r-1)$

（設問は次ページに続く。）

II　次の問題文の空欄にもっとも適する答えを解答群から選び，その記号をマーク解答用紙にマークせよ。ただし，同じ記号を2度以上用いてもよい。(20点)

$-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で，三角関数に関する積分の計算を行ってみよう。

まず $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}=-\dfrac{(\cos x)'}{\cos x}$ より $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan x\,dx=\boxed{\text{キ}}$ である。同様にして $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x}{1+\sin x}dx=\boxed{\text{ク}}$ が求まる。そこで

$$\frac{\cos x}{1+\sin x}+\frac{\cos x}{1-\sin x}=\frac{2\cos x}{1-\sin^2 x}=\frac{2}{\cos x}$$

を利用すれば，$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$\int_0^{\theta}\frac{1}{\cos x}dx=\log\left(\frac{1+\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\right)$$

が得られ，これより $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos x}dx=\boxed{\text{サ}}$ がわかる。さらにこれを用いて，例えば $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin^2 x}{\cos x}dx=\boxed{\text{シ}}-\boxed{\text{ス}}$ と計算される。

また，$\cos^3 x$ についても，$\cos^3 x=(1-\sin^2 x)\cos x$ を利用すれば

$$\int_0^{\theta}\cos^3 x\,dx=\boxed{\text{セ}}-\frac{1}{3}\left(\boxed{\text{ソ}}\right)^3$$

が得られる。

問題IIの解答群

ⓐ　0	ⓑ　1	ⓒ　2	ⓓ　3
ⓔ　$\sqrt{2}$	ⓕ　$\sqrt{3}$	ⓖ　$\dfrac{\pi}{2}$	ⓗ　π
ⓘ　$\log 2$	ⓙ　$\log 3$	ⓚ　$-\log 2$	ⓛ　$-\log 3$
ⓜ　θ	ⓝ　$\sin\theta$	ⓞ　$\cos\theta$	ⓟ　$\tan\theta$
ⓠ　$\sin^2\theta$	ⓡ　$\cos^2\theta$	ⓢ　$-\sin\theta$	ⓣ　$-\cos\theta$

（設問は次ページに続く。）

III　nを自然数，x，yを実数とし，$x \neq 1$とする。また，2次の正方行列A，Eを

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と定める。以下の問いに答えよ。(30点)

(1)　$x \neq 1$に注意して，和$S_n = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$を求めよ。

(2)　A^2，A^3，A^4を求めよ。また，一般の自然数nに対するA^nの形を推測し，それを数学的帰納法によって証明せよ。

(3)　$E + A + A^2 + \cdots + A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$とおくことにより，数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$，$\{d_n\}$を定める。$a_n$，$b_n$，$c_n$，$d_n$を求めよ。

（設問は次ページに続く。）

IV　$x>0$ に対し $f(x)=\sqrt{x}\log x$ とおき，関数 $y=f(x)$ のグラフを C とする。以下の問いに答えよ。(30 点)

(1) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x)$ を求めよ。ただし，$\displaystyle\lim_{t\to+0} t\log t=0$ を用いてよい。

(2) 関数 $f(x)$ の極値とグラフ C の変曲点を求め，C の概形を描け。

(3) C の変曲点を $(b, f(b))$ とする。$a>0$ に対し，定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ を a を用いて表し，極限 $\displaystyle\lim_{a\to+0}\int_a^b f(x)dx$ を求めよ。

(以下計算用紙)