2019 年度入学試験問題

数　　学

（試験時間　13：35〜15：15　100 分）

1．解答用紙は，記述解答用紙のみです。

2．問題は，Ⅰ〜Ⅳの 4 題あります。そのうち 3 題を選択して解答してください。選択した問題には解答用紙の設問番号の右側の選択欄に○を記入してください。（○の記入がない場合は採点の対象となりませんので注意してください。）

　なお，4 題すべてに○を記入した場合は，数学の解答はすべて無効となります。

（記入例）

Ⅰ	選　択	○

3．解答は，必ず解答欄に記入してください。解答欄以外に書くと無効となります。

4．解答は，ＨＢの鉛筆またはシャープペンシルを使用し，訂正する場合は，プラスチック製の消しゴムを使用してください。

5．解答用紙には，受験番号と氏名を必ず記入してください。

6．満点が 150 点となる配点表示になっていますが，数学科は満点が 300 点であり，各問の配点は 2 倍となります。

142−MQ

(設問は 2 ページより始まる)

I　実数を係数とする n 次多項式 $P(x)$ が，$x=0,\ 2,\ 4,\ \ldots,\ 2n$ で整数値 $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n$ をとると仮定する。また，$Q_0(x)=1$，$Q_1(x)=\dfrac{x}{2}$，$Q_2(x)=\dfrac{x(x-2)}{2\cdot 4}$ とし，一般に

$$Q_n(x)=\frac{x(x-2)(x-4)\cdots(x-2n+2)}{n!\cdot 2^n}$$

とする。以下の問いに答えよ。(50 点)

(1)　x が偶数のとき，$Q_0(x),\ Q_1(x),\ \ldots,\ Q_n(x)$ は整数であることを示せ。

(2)　$n=3$ の場合に，多項式

$$Q(x)=b_0Q_0(x)+b_1Q_1(x)+b_2Q_2(x)+b_3Q_3(x)$$

が $x=0,\ 2,\ 4,\ 6$ において $Q(x)=P(x)$ を満たすように，定数 $b_0,\ b_1,\ b_2,\ b_3$ を定めよ。

上の (2) において，$P(x)-Q(x)$ に因数定理を適用すると，$P(x)$ が $Q(x)$ に一致することがわかる。以下では，n を一般の自然数とする。

(3)　x が偶数のとき，$P(x)$ は整数であることを示せ。

(4)　x が奇数のとき，$P(x)\fallingdotseq 0$ ならば

$$|P(x)|\geqq\frac{1}{n!\cdot 2^n}$$

が成り立つことを示せ。

（設問は次のページにつづく）

II　$x>0$ の範囲で与えられた関数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ を考える。$b>0$ と $c>1$ に対して，2 点 $\mathrm{P}(b, f(b))$，$\mathrm{Q}(cb, f(cb))$ における $y=f(x)$ のグラフの接線をそれぞれ ℓ_1, ℓ_2 とし，ℓ_1 と ℓ_2 の交点を R とする。以下の問いに答えよ。（50 点）

(1)　ℓ_1 の方程式，ℓ_2 の方程式，および R の座標を求めよ。

(2)　x 軸上に 2 点 $\mathrm{T}(b, 0)$, $\mathrm{U}(cb, 0)$ をとる。五角形 PTUQR の面積 S を求めよ。

定数 $a>1$ と自然数 n に対し，$c=a^{\frac{1}{n}}$ とする。(1), (2) において $b=c^{k-1}$ として得られる五角形の面積を S_k とし ($k=1, 2, \ldots, n$)，$A_n=S_1+S_2+\cdots+S_n$ とおく。

(3)　A_n を a と n で表し，極限値 $A=\lim_{n\to\infty} A_n$ を求めよ。

(設問は次のページにつづく)

III　4 つの複素数 w_1, w_2, w_3, w_4 が，

$$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = 0, \quad |w_1| = |w_2| = |w_3| = |w_4| = 1$$

を満たしているとする。このとき w_1, w_2, w_3, w_4 は，互いに -1 倍である 2 つの複素数の 2 組からなる。すなわち，必要ならこれら 4 つの複素数の番号を入れ替えることにより $w_2 = -w_1$, $w_4 = -w_3$ となる。この事実を複素数の性質を利用して証明する。

複素数 z の 4 次式 $(z-w_1)(z-w_2)(z-w_3)(z-w_4)$ を展開して $z^4+az^3+bz^2+cz+d$ とおく。以下の問いに答えよ。(50 点)

(1)　$a=0$ および $|d|=1$ を示せ。

(2)　$\dfrac{1}{w_1}+\dfrac{1}{w_2}+\dfrac{1}{w_3}+\dfrac{1}{w_4}=0$ を証明し，$c=0$ を示せ。

(3)　複素数 u を未知数とする方程式 $u^2+bu+d=0$ の解 $u=\dfrac{-b\pm E}{2}$ を使って上の事実を証明せよ。ただし E は $E^2=b^2-4d$ を満たす複素数である。

(設問は次のページにつづく)

IV　t を実数とし，定積分

$$I(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x - t\cos x|\,dx$$

を考える。以下の問いに答えよ。(50 点)

(1)　$t \leqq 0$ のとき，$I(t)$ を求めよ。

(2)　$t > 0$ とする。$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において $\sin x - t\cos x = 0$ を満たす x を θ とするとき，$I(t)$ を θ で表せ。

(3)　t が実数全体を動くとき，$I(t)$ を最小にする t の値とその最小値を求めよ。

（以下計算用紙）

(計算用紙)

(計算用紙)

(計算用紙)

(計算用紙)