2013 年度入学試験問題

数　　学

（試験時間　15：20～17：00　100 分）

1．解答用紙は，記述解答用紙とマーク解答用紙の 2 種類がありますので注意してください。

2．解答は，必ず解答欄に記入してください。なお，解答欄以外に書くと無効となりますので注意してください。

3．解答は，HBの鉛筆またはシャープペンシルを使用し，訂正する場合は，プラスチック製の消しゴムを使用してください。特に，マーク解答用紙には鉛筆のあとや消しくずを残さないでください。また，折りまげたり，汚したりしないでください。記述解答用紙の下敷きにマーク解答用紙を使用することは絶対にさけてください。

4．解答用紙には，受験番号と氏名を必ず記入してください。

5．マーク解答用紙の受験番号および受験番号のマーク記入は，コンピュータ処理上非常に重要なので，誤記のないよう特に注意してください。

6．設問文にある点数は，満点が 100 点となるような配点表示になっていますが，数学科は満点が 200 点であり，各問の配点は 2 倍になります。

I　次の問題文の空欄にもっとも適する答えを解答群から選び，その記号をマーク解答用紙にマークせよ。ただし，同じ記号を2度以上用いてもよい。(20点)

座標平面上で，x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ。いくつかの図形について，それらに含まれる格子点の総数を求めてみよう。

O$(0,0)$, A$(6,6)$, B$(7,12)$, C$(8,20)$ とする。このとき，線分 OA 上にある格子点の総数は7である。また, 線分 OB, 線分 OC 上にある格子点の総数は, それぞれ $\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$ である。

次に，a, b を正の整数とし，P$(a,0)$, Q(a,b), R$(0,b)$ とする。また，a と b の最大公約数を d とする。このとき，線分 OQ 上にある格子点の総数は $\boxed{\text{ウ}}$ である。さらに，長方形 OPQR 上にある格子点の総数は $\boxed{\text{エ}}$ であり，直角三角形 OPQ 上にある格子点の総数は $\boxed{\text{オ}}$ である。ただし，長方形 OPQR や直角三角形 OPQ は，周および内部を含むとする。

また，D$(12,3)$, E$(12,0)$, F$(16,0)$, G$(16,10)$ とする。このとき，台形 DEFG 上にある格子点の総数は $\boxed{\text{カ}}$ であり，三角形 ODG 上にある格子点の総数は $\boxed{\text{キ}}$ である。ただし，台形 DEFG や三角形 ODG は，周および内部を含むとする。

問題 I の ア，イ の解答群

ⓐ 1　ⓑ 2　ⓒ 3　ⓓ 4　ⓔ 5

ⓕ 6　ⓖ 7　ⓗ 8　ⓘ 9

問題 I のウの解答群

ⓐ a　ⓑ $a+1$　ⓒ $a-1$　ⓓ b　ⓔ $b+1$

ⓕ $b-1$　ⓖ d　ⓗ $d+1$　ⓘ $d-1$　ⓙ $a+b$

ⓚ $a+b+1$　ⓛ $a+b-1$　ⓜ $a+b-d$　ⓝ $a+b-d+1$　ⓞ $a+b-d-1$

問題 I のエの解答群

ⓐ ab　ⓑ $ab+1$　ⓒ $ab-1$

ⓓ $(a+1)(b+1)$　ⓔ $(a+1)(b+1)+1$　ⓕ $(a+1)(b+1)-1$

ⓖ $(a-1)(b-1)$　ⓗ $(a-1)(b-1)+1$　ⓘ $(a-1)(b-1)-1$

問題Ⅰのオの解答群

ⓐ $\frac{1}{2}(a+1)(b+1)$

ⓑ $\frac{1}{2}\{(a+1)(b+1)+1\}$

ⓒ $\frac{1}{2}\{(a+1)(b+1)-1\}$

ⓓ $\frac{1}{2}(a+2)(b+1)$

ⓔ $\frac{1}{2}(a+1)(b+2)$

ⓕ $\frac{1}{2}(a+2)(b+2)$

ⓖ $\frac{1}{2}(ab+d)$

ⓗ $\frac{1}{2}(ab+d+1)$

ⓘ $\frac{1}{2}(ab+d-1)$

ⓙ $\frac{1}{2}\{(a+1)(b+1)+d\}$

ⓚ $\frac{1}{2}\{(a+1)(b+1)+d+1\}$

ⓛ $\frac{1}{2}\{(a+1)(b+1)+d-1\}$

問題Ⅰのカ，キの解答群

ⓐ 31　ⓑ 32　ⓒ 33　ⓓ 34　ⓔ 35

ⓕ 36　ⓖ 37　ⓗ 38　ⓘ 39　ⓙ 40

ⓚ 41　ⓛ 42　ⓜ 43　ⓝ 44　ⓞ 45

(設問は次ページに続く。)

II　次の問題文の空欄にもっとも適する答えを解答群から選び，その記号をマーク解答用紙にマークせよ。ただし，同じ記号を2度以上用いてもよい。(20 点)

ベクトル $\overrightarrow{e_0}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ を

$$\overrightarrow{e_0} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1), \quad \overrightarrow{e_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1), \quad \overrightarrow{e_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,-1), \quad \overrightarrow{e_3} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$$

とおく。座標平面上の点 $\mathrm{P}_1(1,0)$ と $\mathrm{P}_2(0,1)$ から始めて，点 P_3, $\mathrm{P}_4, \ldots$ を次の手順によって定める。

> k を 4 で割った余りが j であるとき, P_k から $\overrightarrow{e_j}$ と同じ向きに長さ $\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\overrightarrow{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k}\right|$ だけ進んだ点を P_{k+1} と定める。

例えば P_3 の座標は $\boxed{\text{ク}}$ であり, P_4 と P_5 の座標はそれぞれ $\boxed{\text{ケ}}$, $\boxed{\text{コ}}$ である。$k = 1, 2, \ldots$ に対し, $\ell_k = \left|\overrightarrow{\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+1}}\right|$ とする。k が 4 の倍数であるとき

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+2}} = \boxed{\text{サ}}$$

であり, k を 4 で割った余りが 2 であるとき

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+2}} = \boxed{\text{シ}}$$

である。したがって k が偶数ならば, $\overrightarrow{\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+2}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{P}_{k+2}\mathrm{P}_{k+4}}$ は $\boxed{\text{ス}}$ という関係をみたし, P_k はすべて同一直線上にあることがわかる。以下では $n = 1, 2, \ldots$ に対して P_{2n} の x 座標を a_n と表す。このとき

$$a_{n+2} - a_{n+1} = \boxed{\text{セ}} \times (a_{n+1} - a_n)$$

という関係が成立するから, a_n の階差数列は公比 $\boxed{\text{セ}}$ の等比数列である。したがって

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \boxed{\text{ソ}}$$

となる。

問題 II のク, ケ, コの解答群

ⓐ $(-1,0)$　　ⓑ $(0,-1)$　　ⓒ $(1,0)$

ⓓ $(0,1-\sqrt{2})$　　ⓔ $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$　　ⓕ $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$

ⓖ $\left(\frac{-1-\sqrt{2}}{2}, \frac{-1-\sqrt{2}}{2}\right)$　　ⓗ $\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}, \frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)$　　ⓘ $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

ⓙ $\left(\frac{1+\sqrt{2}}{4}, \frac{1+\sqrt{2}}{4}\right)$　　ⓚ $\left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}, \frac{2+\sqrt{2}}{4}\right)$　　ⓛ $\left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}, \frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)$

問題 II のサ, シの解答群

ⓐ $\ell_{k-2}\,\overrightarrow{e_0}+\ell_{k-1}\,\overrightarrow{e_1}$　ⓑ $\ell_{k-1}\,\overrightarrow{e_0}+\ell_{k}\,\overrightarrow{e_1}$　ⓒ $\ell_{k}\,\overrightarrow{e_0}+\ell_{k+1}\,\overrightarrow{e_1}$

ⓓ $\ell_{k+1}\,\overrightarrow{e_0}+\ell_{k+2}\,\overrightarrow{e_1}$　ⓔ $\ell_{k-1}\,\overrightarrow{e_3}+\ell_{k}\,\overrightarrow{e_0}$　ⓕ $\ell_{k-2}\,\overrightarrow{e_2}+\ell_{k-1}\,\overrightarrow{e_3}$

ⓖ $\ell_{k-1}\,\overrightarrow{e_2}+\ell_{k}\,\overrightarrow{e_3}$　ⓗ $\ell_{k}\,\overrightarrow{e_2}+\ell_{k+1}\,\overrightarrow{e_3}$　ⓘ $\ell_{k+1}\,\overrightarrow{e_2}+\ell_{k+2}\,\overrightarrow{e_3}$

問題 II のスの解答群

ⓐ $\overrightarrow{\mathrm{P}_{k+2}\mathrm{P}_{k+4}}=-\overrightarrow{\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+2}}$　ⓑ $\overrightarrow{\mathrm{P}_{k+2}\mathrm{P}_{k+4}}=\overrightarrow{\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+2}}$

ⓒ $\overrightarrow{\mathrm{P}_{k+2}\mathrm{P}_{k+4}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\overrightarrow{\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+2}}$　ⓓ $\overrightarrow{\mathrm{P}_{k+2}\mathrm{P}_{k+4}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\overrightarrow{\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+2}}$

ⓔ $\overrightarrow{\mathrm{P}_{k+2}\mathrm{P}_{k+4}}=-\dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+2}}$　ⓕ $\overrightarrow{\mathrm{P}_{k+2}\mathrm{P}_{k+4}}=\dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+2}}$

ⓖ $\overrightarrow{\mathrm{P}_{k+2}\mathrm{P}_{k+4}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\,\overrightarrow{\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+2}}$　ⓗ $\overrightarrow{\mathrm{P}_{k+2}\mathrm{P}_{k+4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\,\overrightarrow{\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+2}}$

問題 II のセ, ソの解答群

ⓐ -1　ⓑ 1　ⓒ $1-\sqrt{2}$　ⓓ $-\dfrac{1}{2}$

ⓔ $\dfrac{1}{2}$　ⓕ $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　ⓖ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　ⓗ $\dfrac{4-3\sqrt{2}}{2}$

ⓘ $\dfrac{-1-\sqrt{2}}{3}$　ⓙ $\dfrac{-2+\sqrt{2}}{3}$　ⓚ $\dfrac{1-\sqrt{2}}{3}$　ⓛ $\dfrac{-2+2\sqrt{2}}{3}$

ⓜ $-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　ⓝ $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　ⓞ $\dfrac{1-\sqrt{2}}{4}$

(設問は次ページに続く。)

III　座標平面上に 2 点 A$(-1,0)$, B$(3,2)$ をとる。m を実数とし，直線 $y=mx$ を ℓ とする。以下の問いに答えよ。（30 点）

(1) ℓ 上の点 P の座標を (t,mt) とするとき，$\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2$ を t,m を用いて表せ。

(2) 点 P が ℓ 上を動くとき，$\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2$ を最小にする P の座標を (X,Y) とおく。X,Y を m で表せ。

(3) m が実数全体を動くとき，(X,Y) はある曲線 C 上を動く。C の方程式を求めよ。

(設問は次ページに続く。)

IV　$f(x) = xe^{1-x}$ とおき, 関数 $y = f(x)$ のグラフを C とする。以下の問いに答えよ。(30 点)

(1) $f(x)$ の極値と, 曲線 C の変曲点の x 座標を求めよ。

(2) $0 < t < 1$ とし, 点 (t, te^{1-t}) における曲線 C の接線を ℓ とする。ℓ と x 軸との交点の x 座標を t で表せ。

(3) (2) のもとで, 曲線 C, 直線 ℓ および x 軸で囲まれる部分の面積 $S(t)$ を求めよ。

(4) $\displaystyle\lim_{t \to 1-0} \left\{ S(t) - \frac{1}{2(1-t)} \right\}$ を求めよ。

（以下計算用紙）