2012 年度入学試験問題

数　　学

（試験時間　15：20～17：00　100 分）

1．解答用紙は，記述解答用紙とマーク解答用紙の 2 種類がありますので注意してください。

2．解答は，必ず解答欄に記入してください。なお，解答欄以外に書くと無効となりますので注意してください。

3．解答は，HBの鉛筆またはシャープペンシルを使用し，訂正する場合は，プラスチック製の消しゴムを使用してください。特に，マーク解答用紙には鉛筆のあとや消しくずを残さないでください。また，折りまげたり，汚したりしないでください。記述解答用紙の下敷きにマーク解答用紙を使用することは絶対にさけてください。

4．解答用紙には，受験番号と氏名を必ず記入してください。

5．マーク解答用紙の受験番号および受験番号のマーク記入は，コンピュータ処理上非常に重要なので，誤記のないよう特に注意してください。

6．設問文にある点数は，満点が 100 点となるような配点表示になっていますが，数学科の配点は 200 点となります。

I　次の問題文の空欄にもっとも適する答えを解答群から選び，その記号をマーク解答用紙にマークせよ。ただし，同じ記号を2度以上用いてもよい。(20点)

a，b，r，k は $a > b > 0$，$r > 0$，$k > 0$ を満たす定数とする。

座標平面の相異なる3点A，B，Cが円 $X^2 + Y^2 = r^2$ の上を動くとき，△ABCの面積 S_1 の最大値は次のようにして求められる。まず，2点B，Cを固定して点Aを動かすとき，その三角形の高さに注意すれば，面積が最大となるのは，AB = AC であるような二等辺三角形のときである。したがって，この円に内接する二等辺三角形のうちで面積が最大のものを見つければよい。そこで，$\mathrm{A}(0, r)$，$\mathrm{B}(-r\cos\theta, r\sin\theta)$，$\mathrm{C}(r\cos\theta, r\sin\theta)\left(-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とすれば S_1 の最大値は $\sin\theta = \boxed{\text{ア}}$ のとき $S_1 = \boxed{\text{イ}}\, r^2$ であることがわかる。

点 $\mathrm{P}(x, y)$ の y 座標を k 倍した点を $\mathrm{P}'(x, ky)$ とおく。相異なる3点A，B，Cの座標を $\mathrm{A}(x_1, y_1)$，$\mathrm{B}(x_2, y_2)$，$\mathrm{C}(x_3, y_3)$ としたとき，△ABCの面積 S は内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて計算すると $\boxed{\text{ウ}}$ と表される。したがって，点 $\mathrm{A}'(x_1, ky_1)$，$\mathrm{B}'(x_2, ky_2)$，$\mathrm{C}'(x_3, ky_3)$ のなす三角形の面積を S_2 とおくと，S_2 は S の $\boxed{\text{エ}}$ 倍である。

点 $\mathrm{P}(x, y)$ は楕円 $E : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ の上を動く点とする。$k = \dfrac{a}{b}$ であるとき，点 $\mathrm{P}'(x, ky)$ は原点を中心とする半径 $\boxed{\text{オ}}$ の円上を動く。したがって，相異なる3点A，B，Cが楕円 E 上を動くとき，△ABCの面積の最大値は a，b を用いて $\boxed{\text{カ}}$ と表される。

問題Iのア，イの解答群

ⓐ $-\dfrac{1}{2}$　ⓑ $-\dfrac{1}{3}$　ⓒ $\dfrac{1}{3}$　ⓓ $\dfrac{1}{2}$　ⓔ $\dfrac{16}{9}$

ⓕ $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　ⓖ $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　ⓗ $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$　ⓘ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　ⓙ $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

ⓚ $\dfrac{8\sqrt{2}}{9}$　ⓛ $\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$　ⓜ $\dfrac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{3}$

問題Ⅰのウの解答群

ⓐ $|(x_2-x_1)(x_3-x_1)+(y_2-y_1)(y_3-y_1)|$

ⓑ $\frac{1}{2}|(x_2-x_1)(x_3-x_1)+(y_2-y_1)(y_3-y_1)|$

ⓒ $|(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)|$

ⓓ $\frac{1}{2}|(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)|$

ⓔ $|(x_2-x_1)(y_3-y_1)+(x_3-x_1)(y_2-y_1)|$

ⓕ $\frac{1}{2}|(x_2-x_1)(y_3-y_1)+(x_3-x_1)(y_2-y_1)|$

ⓖ $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2}$
$-\{(x_2-x_1)(x_3-x_1)+(y_2-y_1)(y_3-y_1)\}$

ⓗ $\frac{1}{2}\Big[\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2}$
$-\{(x_2-x_1)(x_3-x_1)+(y_2-y_1)(y_3-y_1)\}\Big]$

問題Ⅰのエの解答群

ⓐ $\frac{1}{k^3}$　ⓑ $\frac{1}{k^2}$　ⓒ $\frac{1}{k}$　ⓓ $\frac{2}{k}$　ⓔ $\frac{k}{2}$　ⓕ k　ⓖ k^2　ⓗ k^3

問題Ⅰのオの解答群

ⓐ $\frac{a}{2}$　ⓑ $\frac{a^2}{4}$　ⓒ a　ⓓ a^2　ⓔ ab

ⓕ $\frac{b}{2}$　ⓖ $\frac{b^2}{4}$　ⓗ b　ⓘ b^2　ⓙ $(ab)^2$

問題Ⅰのカの解答群

ⓐ $\frac{\sqrt{3}}{2}ab$　ⓑ $\frac{8\sqrt{2}}{9}ab$　ⓒ $\frac{\sqrt{3}}{4}ab$　ⓓ $\frac{16}{9}ab$　ⓔ $\frac{3\sqrt{3}}{4}ab$

ⓕ $\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{a^3}{b}$　ⓖ $\frac{8\sqrt{2}}{9}\frac{a^3}{b}$　ⓗ $\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{a^3}{b}$　ⓘ $\frac{16}{9}\frac{a^3}{b}$　ⓙ $\frac{3\sqrt{3}}{4}\frac{a^3}{b}$

（設問は次ページに続く。）

II 次の問題文の空欄にもっとも適する答えを解答群から選び，その記号をマーク解答用紙にマークせよ。ただし，同じ記号を2度以上用いてもよい。(20点)

a を1より大きい実数とする。xy 平面において，x 軸，y 軸，直線 $x=1$ と曲線 $y=a^x$ で囲まれる部分の面積を近似的に計算したい。n を自然数とし，$k=1,2,\cdots,n$ とする。また，$f(x)$ は $0 \leqq x \leqq 1$ において $f(x)>0$ を満たす連続関数とする。

(1) 4点 $\left(\frac{k-1}{n}, 0\right)$，$\left(\frac{k}{n}, 0\right)$，$\left(\frac{k}{n}, f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$，$\left(\frac{k-1}{n}, f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)$ を頂点にもつ台形の面積を M_k とする。このとき $M_k = \boxed{\text{キ}}$ となる。とくに $f(x)=a^x$ であれば，面積の和 $S_n = M_1 + M_2 + \cdots + M_n$ は $\boxed{\text{ク}}$ となる。ここで，極限 $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \boxed{\text{ケ}}$ を用いると，$\lim_{n \to \infty} S_n = \boxed{\text{コ}}$ と計算される。

(2) 以下では，曲線 $y=f(x)$ は下に凸とする。

3点 $\left(\frac{k-1}{n}, f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)$，$\left(\frac{2k-1}{2n}, f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\right)$，$\left(\frac{k}{n}, f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$ を通る放物線を

$$C_k : y = \alpha\left(x - \frac{2k-1}{2n}\right)^2 + \beta\left(x - \frac{2k-1}{2n}\right) + \gamma \qquad (\alpha, \beta, \gamma \text{ は定数})$$

とおく。x 軸，直線 $x=\frac{k-1}{n}$，直線 $x=\frac{k}{n}$ と放物線 C_k で囲まれる部分の面積を N_k とおくとき，$N_k = \boxed{\text{サ}}$ となる。とくに $f(x)=a^x$ であれば，面積の和 $N_1 + N_2 + \cdots + N_n$ は $\boxed{\text{シ}}$ となる。

問題IIのケ，コの解答群

ⓐ e^a　ⓑ e^{-a}　ⓒ $\frac{e^a}{a-1}$　ⓓ $(a-1)e^a$　ⓔ $(a-1)e^{-a}$

ⓕ $\log a$　ⓖ $\frac{1}{\log a}$　ⓗ $\frac{\log a}{a-1}$　ⓘ $\frac{a-1}{\log a}$　ⓙ $(a-1)\log a$

問題IIのキ，サの解答群

ⓐ $\dfrac{1}{n}\left\{f\left(\dfrac{k-1}{n}\right)+f\left(\dfrac{k}{n}\right)\right\}$

ⓑ $\dfrac{1}{2n}\left\{f\left(\dfrac{k-1}{n}\right)+f\left(\dfrac{k}{n}\right)\right\}$

ⓒ $\dfrac{1}{3n}\left\{f\left(\dfrac{k-1}{n}\right)+f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)+f\left(\dfrac{k}{n}\right)\right\}$

ⓓ $\dfrac{1}{4n}\left\{f\left(\dfrac{k-1}{n}\right)+2f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)+f\left(\dfrac{k}{n}\right)\right\}$

ⓔ $\dfrac{1}{5n}\left\{f\left(\dfrac{k-1}{n}\right)+3f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)+f\left(\dfrac{k}{n}\right)\right\}$

ⓕ $\dfrac{1}{6n}\left\{f\left(\dfrac{k-1}{n}\right)+4f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)+f\left(\dfrac{k}{n}\right)\right\}$

問題IIのク，シの解答群

ⓐ $\dfrac{(a^n-1)\sqrt{a}}{n(a-1)}$

ⓑ $\dfrac{a^{\frac{1}{2n}}(a-1)}{n(a^{\frac{1}{n}}-1)}$

ⓒ $\dfrac{(a+1)(a^n-1)}{n(a-1)}$

ⓓ $\dfrac{(a^{\frac{1}{n}}+1)(a-1)}{n(a^{\frac{1}{n}}-1)}$

ⓔ $\dfrac{(a+1)(a^n-1)}{2n(a-1)}$

ⓕ $\dfrac{(a^{\frac{1}{n}}+1)(a-1)}{2n(a^{\frac{1}{n}}-1)}$

ⓖ $\dfrac{(a^{\frac{1}{n}}+a^{\frac{1}{2n}}+1)(a-1)}{n(a^{\frac{1}{n}}-1)}$

ⓗ $\dfrac{(a^{\frac{1}{n}}+a^{\frac{1}{2n}}+1)(a-1)}{3n(a^{\frac{1}{n}}-1)}$

ⓘ $\dfrac{(a^{\frac{1}{n}}+2a^{\frac{1}{2n}}+1)(a-1)}{4n(a^{\frac{1}{n}}-1)}$

ⓙ $\dfrac{(a+3\sqrt{a}+1)(a^n-1)}{5n(a-1)}$

ⓚ $\dfrac{(a^{\frac{1}{n}}+4a^{\frac{1}{2n}}+1)(a-1)}{6n(a^{\frac{1}{n}}-1)}$

（設問は次ページに続く。）

III　座標平面において，原点 O$(0, 0)$ を中心とする半径 1 の円を C_0 とし，点 A$\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$ を中心とする半径が $\dfrac{1}{2}$ の円を C_1 とする。以下の問いに答えよ。(30 点)

(1)　円 C_0 と内接し，円 C_1 と外接する円 D の半径を r，中心 G の座標を (α, β) とするとき，r を α によって表せ。

(2)　中心 G(α, β) の軌跡の方程式を求めよ。

以上で考察した円 D は無数にあるが，これらの円はどれも点 B$\left(\dfrac{1}{3}, 0\right)$ を中心とする半径 $\dfrac{2}{3}$ の円 C_2 と特別な位置関係にある。以下ではこのことを調べてみよう。円 D と円 C_2 の 2 つの交点を P，Q とする。

(3)　直線 PQ の方程式を α，β により表せ。

(4)　点 P の座標 (X, Y) が直線 PQ の方程式と円 C_2 の方程式を満たしていることを利用して，$\overrightarrow{\mathrm{BP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{GP}} = 0$ を示せ。

（設問は次ページに続く。）

IV　関数 $f(x)$ の第 n 次導関数を $\dfrac{d^n}{dx^n}f(x)$ で表す。いま，自然数 n に対して関数 $H_n(x)$ を次で定義する。

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

以下の問いに答えよ。(30 点)

(1)　$H_1(x)$，$H_2(x)$，$H_3(x)$ を求めよ。

(2)　導関数 $\dfrac{d}{dx}H_n(x)$ を $H_n(x)$ と $H_{n+1}(x)$ を用いて表せ。さらに，n に関する数学的帰納法により $H_n(x)$ が n 次多項式（整式）であることを証明せよ。

(3)　$n \geqq 3$ のとき，定積分

$$S_n(a) = \int_0^a xH_n(x)e^{-x^2}dx$$

を $H_{n-1}(a)$，$H_{n-2}(a)$，$H_{n-2}(0)$ を用いて表せ。ただし，a は実数とする。

(4)　$n = 6$ のとき，極限値 $\lim_{a \to \infty} S_6(a)$ を求めよ。

必要ならば，自然数 k に対して $\lim_{x \to \infty} x^k e^{-x^2} = 0$ が成り立つことを用いてよい。

（以下計算用紙）