2015 年度入学試験問題

数　学

（試験時間　13：35～15：15　100 分）

1．解答用紙は，記述解答用紙のみです。

2．**問題は，Ⅰ～Ⅳの 4 題あります。そのうち 3 題を選択して解答してください。選択した問題には解答用紙の設問番号の右側の選択欄に○を記入してください。（○の記入がない場合は採点の対象となりませんので注意してください。）**

なお，4 題すべてに○を記入した場合は，数学の解答はすべて無効となります。

（記入例）

Ⅰ	選　択	○

3．解答は，必ず解答欄に記入してください。なお，解答欄以外に書くと無効となりますので注意してください。

4．解答は，ＨＢの鉛筆またはシャープペンシルを使用し，訂正する場合は，プラスチック製の消しゴムを使用してください。

5．解答用紙には，受験番号と氏名を必ず記入してください。

6．満点が 150 点となる配点表示になっていますが，数学科は満点が 300 点であり，各問の配点は 2 倍になります。

I　a を実数とし，x の 2 次関数 $f(x)=x^2-2ax-a-1$ を考える。以下の問いに答えよ。(50 点)

(1) $-1 \leqq x \leqq 1$ における $f(x)$ の最大値を $M(a)$ とおく。$a \geqq 0$ の場合と $a<0$ の場合に分けて，$M(a)$ を a で表せ。さらに，ab 平面上に $b=M(a)$ のグラフをかけ。

(2) $-1 \leqq x \leqq 1$ における $f(x)$ の最小値を $L(a)$ とおく。$L(a)$ を a で表し，ab 平面上に $b=L(a)$ のグラフをかけ。

以下では $M(a)$, $L(a)$ を (1)，(2) で定めた通りとする。

(3) $-2 \leqq L(a)$ かつ $M(a) \leqq 2$ が成り立つような実数 a の範囲を求めよ。

(4) 次を満たす正の実数 k を求めよ。

「$-k \leqq L(a)$ かつ $M(a) \leqq k$ が成り立つような実数 a がただ一つ存在する。」

II　以下の文章を読んで問いに答えよ。(50 点)

水平な机の 3 か所に穴があいており，この位置をそれぞれ A，B，C とする。ただし，三角形 ABC は直角三角形または鋭角三角形とする。これらの穴から長い糸が 1 本ずつ垂らされており，それぞれの糸には同じ重さのおもりが結ばれている。いま，3 本の糸を机の上で一つに結ぶ。3 本の糸にかかる力が釣り合って，結び目が点 P で静止するならば，次の式が成り立つ。

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|}=\overrightarrow{0} \qquad (\star)$$

3 点 A，B，C から点 P の位置を求めよう。

(1) $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ を単位ベクトルとするとき，$|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|$ を内積 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ で表せ。

上の式 $(\star)$ に現れる 3 つのベクトルをそれぞれ

$$\overrightarrow{a}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|},\qquad \overrightarrow{b}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|},\qquad \overrightarrow{c}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|}$$

とおけば，式 $(\star)$ は，3 つの単位ベクトル $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$ が

$$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}=\overrightarrow{0}$$

を満たしていることに他ならない。

(2) $\angle\mathrm{APB}=\dfrac{2\pi}{3}$ であることを示せ。

以下では，机の上の点を xy 座標で表し，$\mathrm{A}(0,0)$，$\mathrm{B}(\sqrt{3},0)$，$\mathrm{C}(0,1)$ の場合を考える。

(3) 辺 BC の中点 Q は $\angle\mathrm{AQB}=\dfrac{2\pi}{3}$ を満たすことを確かめよ。また，三角形 ABC の内部の点 $\mathrm{R}(x,y)$ が $\angle\mathrm{ARB}=\dfrac{2\pi}{3}$ を満たしながら動くとき，その軌跡はある円の一部になる。この円の方程式を求めよ。

(4) (3) と同様に，三角形 ABC の内部の点 $\mathrm{R}(x,y)$ が $\angle\mathrm{ARC}=\dfrac{2\pi}{3}$ を満たしながら動くとき，その軌跡を含む円の方程式を求めよ。また，以上の考察をもとに，点 P の座標を求めよ。

III 関数 $f(x) = x\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ $(x>0)$ について，以下の問いに答えよ。(50 点)

(1) 極限 $A = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ を求めよ。

(2) $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$ であること，および $x>0$ で常に $f''(x)<0$ であることを示せ。また，これらを用いて，$x>0$ で常に $f'(x)>0$ であることを説明せよ。

(3) 点 $(a, f(a))$ (ただし $a>0$) における $y=f(x)$ のグラフの接線 ℓ と y 軸との交点の y 座標を求めよ。さらに，接線 ℓ，直線 $y=A$ および y 軸で囲まれる三角形の面積 $S(a)$ を a で表せ。ただし，A は (1) で求めた極限を表す。

(4) $0 \leqq t \leqq h$ とする。このとき，

$$\frac{t}{(1+h)^2} \leqq \frac{t}{(1+t)^2} \leqq t$$

であることを用いて，不等式

$$\frac{h^2}{2(1+h)^2} \leqq \log(1+h) - \frac{h}{1+h} \leqq \frac{h^2}{2}$$

を示せ。さらに，(3) で求めた $S(a)$ に対して，$a = \dfrac{1}{h}$ とおくことにより，極限

$$\lim_{a\to\infty} \frac{1}{S(a)}$$

を求めよ。

IV　関数 $f(x) = \int_0^x \left|\sin^3 t\right| dt$ について，以下の問いに答えよ。(50 点)

(1) 不定積分 $\int \sin^3 t\, dt$ を求めよ。

(2) n を自然数とする。$n\pi \leqq x < (n+1)\pi$ のとき，不等式

$$\frac{4n}{3} \leqq f(x) < \frac{4(n+1)}{3}$$

が成り立つことを示せ。

(3) $0 \leqq x \leqq 3\pi$ において関数 $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ。ただし，変曲点は求めなくてよい。

(4) $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{4}{3\pi}$ を示せ。