2019 年 度 入 学 試 験 問 題

数　　学

（試験時間　16：35〜17：35　60 分）

1．この問題冊子が，出願時に選択した科目のものであることを確認のうえ，解答してください。

2．解答用紙は，記述解答用紙のみです。

3．解答は，必ず解答欄に記入してください。解答欄以外に書くと無効となります。

4．解答は，ＨＢの鉛筆またはシャープペンシルを使用し，訂正する場合は，プラスチック製の消しゴムを使用してください。

5．解答用紙には，受験番号と氏名を必ず記入してください。

(設問は２ページより始まる)

I　次の問に答えよ。(30 点)

(1) k を正の整数，m を k 以上の整数とするとき，$m! \geqq k!\,(k+1)^{m-k}$ を示せ。

(2) $a_n = 1 + \dfrac{1}{1!}\left(\dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{1}{2!}\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{3!}\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ とおく。n が 3 以上の整数ならば，$1.645 < a_n < 1.65$ が成り立つことを示せ。

（設問は次のページにつづく）

II　a を正の定数とする。次の問に答えよ。（40 点）

(1) r を正の実数とする。xy 平面上の点 $(a, 0)$ を中心とする半径 r の円 C の方程式をかけ。

(2) t を実数とする。放物線 $y = (x-a)^2 + t$ と円 C とが共有点をもつための条件を，r と t を用いて表せ。

(3) (2) で求めた条件の表す領域を，rt 平面上に図示せよ。

（設問は次のページにつづく）

III　$f(x)=ax+b$ とし，

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt, \quad G(x)=\int_x^1 f(t)dt$$

とする。さらに，$F(y)$ に $y=G(x)$ を代入した $F(G(x))$ に関して，

$$F(G(x))=-\{F(x)\}^2+pG(x)+q$$

が成り立つとする。ただし，a,b,p,q は実数で，$a\neq 0$ とする。このとき，次の問に答えよ。(30 点)

(1) a の値を求めよ。

(2) $F(x)$ が $0\leqq x\leqq 1$ で最大値 $\dfrac{1}{4}$ をとるとき，b の値を求めよ。

(3) (2) の条件のもとで，p,q の値を求めよ。

（以下計算用紙）