2019 年度入学試験問題

数　学

（試験時間　14：50〜15：50　60 分）

1．この問題冊子が，出願時に選択した科目のものであることを確認のうえ，解答してください。

2．解答用紙は，記述解答用紙のみです。

3．解答は，必ず解答欄に記入してください。解答欄以外に書くと無効となります。

4．解答は，ＨＢの鉛筆またはシャープペンシルを使用し，訂正する場合は，プラスチック製の消しゴムを使用してください。

5．解答用紙には，受験番号と氏名を必ず記入してください。

150－SQ－M

（設問は２ページより始まる）

I　座標平面上の 2 点 A(x, y)，B$(1, -2)$ を結ぶ線分 AB を $2:1$ に内分する点を C(u, v) とする。以下の問に答えよ。(35 点)

(1) u，v を x，y の式で表せ。

以下では，点 C が放物線 $v = u^2$ 上を動くときの点 A の軌跡を $H : y = f(x)$ とする。

(2) $f(x)$ を求めよ。

(3) H と放物線 $y = x^2$ の交点の座標を求めよ。

(4) a を定数とする。点 $(a, f(a))$ における曲線 H の接線を ℓ_a とし，点 (a, a^2) における放物線 $y = x^2$ の接線を m_a とする。ℓ_a と m_a の方程式を求めよ。

(5) 問 (4) で求めた 2 直線 ℓ_a と m_a が平行となるような定数 a の値を求めよ。

（設問は次のページにつづく）

II 以下の問に答えよ。(30 点)

(1) p, q, r, s を整数とする。$p+q\sqrt{5}=r+s\sqrt{5}$ が成り立つならば，$p=r$ かつ $q=s$ であることを証明せよ。ただし，$\sqrt{5}$ が無理数であることを用いてよい。

(2) 整数からなる数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を

$$\left(3+\sqrt{5}\right)^n=a_n+b_n\sqrt{5}$$

という規則で定める。 a_{n+1}，b_{n+1} を a_n，b_n の式で表せ。

(3) 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を問 (2) で定めたものとするとき，すべての自然数 n について

$$(a_n)^2-5(b_n)^2=4^n$$

が成り立つことを数学的帰納法によって証明せよ。

（設問は次のページにつづく）

III 座標平面上の曲線 $y=(x-a)^2$ を C_a，曲線 $y=-(x-b)^2+h$ を D_b と表す。ただし，a，b，h は定数で，$a>0$ とする。さらに D_b は点 $(0,a^2)$ を通ると仮定する。以下の問に答えよ。(35 点)

(1) h を a，b の式で表せ。

(2) C_a と D_b が接するための必要十分条件を，a，b を用いて表せ。

(3) C_a と D_b の交点の座標を求めよ。

(4) C_a と D_b が接していないとき，C_a と D_b が囲む領域の面積 S を求めよ。

（以下計算用紙）