

2011 年度 入学 試験 問題

数 学

(試験時間 13:15~14:15 60分)

1. この問題は、入学願書提出時に選択した科目の問題です。科目名を確認のうえ、解答してください。
2. 解答用紙は、記述解答用紙のみです。
3. 解答は、必ず解答欄に記入してください。なお、解答欄以外に書くと無効となりますので注意してください。
4. 解答は、HBの鉛筆またはシャープペンシルを使用し、訂正する場合は、プラスチック製の消しゴムを使用してください。
5. 解答用紙には、受験番号と氏名を必ず記入してください。

I 正の整数 m, n が次の 2 つの条件を満たしている。

$$(*) \begin{cases} n \text{ は } m \text{ の倍数} \\ \text{等式 } \frac{2n}{3} = \frac{n}{m} + 1 \text{ が成り立つ} \end{cases}$$

このとき、以下の設問に答えよ。(20 点)

問 1 n を 3 で割ったときの余りを求めよ。

問 2 $(*)$ を満たす組 (m, n) をすべて求めよ。

II 対数関数

$$f(x) = \log_2 x, \quad g(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$$

に対し、3 つの不等式

$$x \geq 1, \quad y \leq f(x), \quad y \geq g(x)$$

によって定められる xy 平面上の領域を D とする。また、 xy 平面上の点 $P(x, y)$ で x, y がともに整数であるものを“格子点”と呼ぶ。このとき、以下の設問に答えよ。

(30 点)

問 1 領域 D を図示せよ。

問 2 「 D に属する格子点 $P(x, y)$ で $x \leq 8$ であるもの」の総数を求めよ。

問 3 「 D に属する格子点 $P(x, y)$ で $x \leq 33, y \geq 1$ であるもの」の総数を求めよ。

III c_0, \dots, c_3 を係数とする 3 次関数 $f(x) = c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0$ は、4 つの条件

$$f(0) = a, \quad f'(0) = 1, \quad f(1) = b, \quad f(-1) = 1$$

を満たしている。ここで a および b は実数で $b \neq 3$ であり、 $f'(x)$ は $f(x)$ の導関数を表す。このとき、以下の設問に答えよ。(20 点)

問 1 $f(x)$ を a, b を用いて表せ。

問 2 3 次関数 $f(x)$ に対し、2 次関数 $g(x)$ と定積分 S を

$$g(x) = f(x) - c_3x^3, \quad S = \int_{-1}^1 g(x) dx$$

と定める。定積分 S の値を a, b を用いて表せ。

問 3 a, b が 3 つの不等式

$$a \geq 0, \quad b \geq 0, \quad a + b \leq 1$$

を満たすとき、問 2 で定めた定積分 S の最大値を求めよ。

IV 3 人がそれぞれ 1 個のサイコロを同時に投げ、2 以下の目が出た者は退場する。1 回目のサイコロ投げで残った人数を $X(1)$ とする。次に $X(1)$ 人がそれぞれ 1 個のサイコロを同時に投げ、2 以下の目が出た者は退場する。2 回目のサイコロ投げで残った人数を $X(2)$ とする。ただし、 $X(1) = 0$ の場合は $X(2) = 0$ とする。

このとき以下の設問に答えよ。なお解答の数値は分数のままでよい。(30 点)

問 1 $X(1) \geq 1$ となる確率を求めよ。

問 2 $X(1)$ の期待値を求めよ。

問 3 $X(2) \geq 1$ となる確率を求めよ。