

# はじめに

数学の成績を決めるのは、**典型問題が何問解けるようになったか?** である。

そのため青チャートのような網羅系問題集を徹底していくわけだが、**多くの人が”その問題”の解き方を、1対1で覚えてしまいがちである。**

これでは時間がかかる上に、初見の問題に対応しづらい。

そこで、当教材では**関連テーマでまとめ直し、抽象化した解法を提示した。**”その問題”でなく”その手の問題”の解き方を示したということだ。

1つの解法でより多くの問題が解けることが実感でき、応用性も高まるであろう。

## 凡例

### 【解法】

抽象化した解法。IF-THENの構文（～という特徴があれば、～と解く）で書かれており、問題の特徴と打ち手をセットで覚えられる。手元の青チャートにメモするとよいだろう。

### 《補足》

さまざまな補足を記載した。

## 第1章 数と式

### 式の展開

式の展開は、端からかければ必ず解ける。ただ計算が大変であるため、さまざまな工夫を学んでいく。

このように、知らないと解けない解法だけでなく、**ラクに解くための解法**を学ぶのが高校数学だ。

実際、青チャートの問題の**約1割**が、ラクに解くための解法を学ぶ問題である。

### 例題 3 多項式の乗法

☆☆☆☆

〔1〕 次の式を計算せよ。

$$(1) \left(\frac{2}{5}x^2y\right)^2 \times (-5xy^2)^3$$

$$(2) (-3a^2b^3)^2 \times (-ab^2)^3 \times (a^2b)^2$$

〔2〕 次の式を展開せよ。

$$(1) -3x^2(3x^2 - 4 + x)$$

$$(2) (x^2 - 2x - 1)(2x^2 + x^3 - 2)$$

**【解法】**

式の展開は端からかければ解けるが、工夫してラクに解きたい。

**《補足》**

工夫の余地がないので、ただ端からかけて展開するだけ。

**例題 4 2次の乗法公式**

★★★★

次の式を展開せよ。

(1)  $(5x - 4y)^2$

(2)  $(2x^2 + 1)^2$

(3)  $(y + 2x)(2x - y)$

(4)  $(x + 5y)(x - 2y)$

(5)  $(2a + 3)(4a + 1)$

(6)  $(3x + 2y)(2x - 3y)$

**【解法】**

式の展開は端からかければ解けるが、工夫してラクに解きたい。

**《補足》**

式の展開では、**展開公式**が使えるとラク。

**例題 8 3次の乗法公式**

★★★★

次の式を展開せよ。

(1)  $(3x + 1)^3$

(2)  $(2x - 3y)^3$

(3)  $(3x + 1)(9x^2 - 3x + 1)$

(4)  $(3a - 2b)(9a^2 + 6ab + 4b^2)$

(5)  $(x + 1)^3(x - 1)^3$

(6)  $(x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$

**【解法】**

式の展開は端からかければ解けるが、工夫してラクに解きたい。

**《補足》**

式の展開では、**展開公式**が使えるとラク。

**例題 5 展開の工夫〔1〕…置き換え**

頻出

★★★★

次の式を展開せよ。

(1)  $(x - y + 2z)^2$

(2)  $(a + 2b + 3c)(a - 2b + 3c)$

(3)  $(a - b + c + d)(a + b + c - d)$

**【解法】**

式の展開は端からかければ解けるが、工夫してラクに解きたい。

《補足》

式の展開では、同じ項を置き換えられる場合、工夫をすると計算がラクになる。

**例題 6** 展開の工夫(2)… $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$  の利用 頻出 ★★☆☆

次の式を展開せよ。

(1)  $(a^4 + b^4)(a^2 + b^2)(a + b)(a - b)$       (2)  $(2a + b)^2(2a - b)^2$

(3)  $(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4)$

【解法】

式の展開は端からかければ解けるが、工夫してラクに解きたい。

《補足》

式の展開でカッコが2つの場合は、かける順番に工夫の余地はないが、**カッコが3つ以上ある場合は**、工夫すると計算がラクになることがある。

**例題 7** 展開の工夫(3)…組み合わせの工夫 頻出 ★★☆☆

次の式を展開せよ。

(1)  $(x - 3)(x - 1)(x + 2)(x + 4)$       (2)  $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 6)$

【解法】

式の展開は端からかければ解けるが、工夫してラクに解きたい。

《補足》

式の展開でカッコが2つの場合は、かける順番に工夫の余地はないが、**カッコが3つ以上ある場合は**、工夫すると計算がラクになることがある。

**例題 21** 根号を含む式の計算 ★★★★

次の式を簡単にせよ。

(1)  $(5\sqrt{3} - \sqrt{5})(\sqrt{3} + 3\sqrt{5})$       (2)  $(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})^2(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})^2$

(3)  $(1 + \sqrt{3} - \sqrt{5})(1 - \sqrt{3} + \sqrt{5})$       (4)  $(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})^2$

【解法】

式の展開は端からかければ解けるが、工夫してラクに解きたい。

《補足》

式の展開でカッコが2つの場合は、かける順番に工夫の余地はないが、**カッコが3つ以上ある場合は**、工夫すると計算がラクになることがある。

## 例題 9 展開の工夫〔4〕… 1文字について整理

★★★★☆

次の式を展開せよ。

$$(1) (a+b-c)^2 + (a-b+c)^2 + (a+b+c)^2 + (b+c-a)^2$$

$$(2) (a+b-c)^2(a-b+c)^2$$

$$(3) (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

### 【解法】

式の展開は端からかければ解けるが、工夫してラクに解きたい。

### 《補足》

- (1) 式の展開では、**同じ項を置き換えられる場合**、工夫をすると計算がラクになる。
- (2) 式の展開でカッコが2つの場合は、かける順番に工夫の余地はないが、**カッコが3つ以上ある場合は**、工夫すると計算がラクになることがある。
- (3) 公式として覚えるべき。

## 因数分解

因数分解は、次の2ステップを踏んで解く。

言い換えれば、この2ステップさえ踏めば**因数分解は何も考えずに解ける**。特に、**ステップ1**を忘れがちなので要注意。

**ステップ1：最低次の文字で整理する** ※次数が同じなら好きな文字でOK

**ステップ2：因数分解の公式を使う**

### <因数分解の公式 (5つ) >

$$mx+my = m(x+y)$$

$$x^2-y^2 = (x+y)(x-y)$$

$$abx^2+(ad+bc)x+cd = (ax+b)(cx+d)$$

$$x^3+y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2)$$

$$x^3+3x^2y+3xy^2+y^3 = (x+y)^3$$

## 例題 1 多項式の整理

★☆☆☆

次の多項式を [ ] 内の文字について降べきの順に整理せよ。また, [ ] 内の文字に着目したときの次数と定数項を答えよ。

(1)  $4x + y^2 - 2 - 3x + 5x^2 + 2y^2$  [x]

(2)  $2a^2 - 3a^2b - 2ab^2 + b + 6a^2b - 4 - 3a$  [a], [a と b]

### 【解法】

特定の文字に注目して整理するだけ。

### 《補足》

因数分解の第一歩は「最低次の文字で整理する」こと。その練習である。

(1) xに注目したとき、yは定数と見なす。

(2) 「aとbの次数」というのはこの問題以外で見たことないのでスキップしてOK。

## 例題 10 公式による因数分解

★☆☆☆

次の式を因数分解せよ。

(1)  $x^2 - 5xy - 24y^2$

(2)  $x^2 + (a + 1)x + a$

(3)  $a^3b + a^2b - 6ab$

(4)  $a^4 - 16b^4$

(5)  $a^2(c - 3) + 4b^2(3 - c)$

### 【解法】

因数分解は2ステップで必ず解ける。

①最低次の文字で整理する ※次数が同じなら好きな文字でOK

②因数分解の公式を使う

### 《補足》

なし

## 例題 11 たすき掛けによる因数分解

頻出

★☆☆☆

次の式を因数分解せよ。

(1)  $6x^2 + 13x + 5$

(2)  $2x^2 + xy - 6y^2$

(3)  $ax^2 - (a + 2)x + 2$

(4)  $2x^2 + (5a + 4)x + a(3a + 4)$

### 【解法】

因数分解は2ステップで必ず解ける。

①最低次の文字で整理する ※次数が同じなら好きな文字でOK

②因数分解の公式を使う

《補足》

なし

**例題 12** 因数分解の工夫〔1〕…最低次数の文字について整理 頻出 ★★☆☆

次の式を因数分解せよ。

(1)  $2a^2b - 3ab + a - 2b - 2$                       (2)  $xyz + x^2y + xy^2 + x + y + z$

(3)  $x^3 + (a + 2)x^2 + (2a + 1)x + a$

【解法】

因数分解は2ステップで必ず解ける。

- ①最低次の文字で整理する ※次数が同じなら好きな文字でOK
- ②因数分解の公式を使う

《補足》

タイトル「最低次数の文字について整理」がなくても最低次の文字で整理するように。

**例題 13** 因数分解の工夫〔2〕…たすき掛けの応用 頻出 ★★☆☆

次の式を因数分解せよ。

(1)  $x^2 + 5xy + 5x + 6y^2 + 11y + 4$                       (2)  $2x^2 + xy - 6y^2 - 4x - y + 2$

(3)  $6x^2 - 7xy + 2y^2 + 3x - y - 3$

【解法】

因数分解は2ステップで必ず解ける。

- ①最低次の文字で整理する ※次数が同じなら好きな文字でOK
- ②因数分解の公式を使う

《補足》

なし

**例題 14** 因数分解の工夫〔3〕…1文字について整理 頻出 ★★☆☆

次の式を因数分解せよ。

(1)  $(a + b + c)(ab + bc + ca) - abc$

(2)  $a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)$

【解法】

因数分解は2ステップで必ず解ける。

- ①最低次の文字で整理する ※次数が同じなら好きな文字でOK
- ②因数分解の公式を使う

《補足》

なし

**例題 15** 因数分解の工夫〔4〕…組み合わせの工夫

★★☆☆

次の式を因数分解せよ。

(1)  $a^2 - a - b^2 + b$

(2)  $x^2 - y^2 - z^2 + 2yz$

(3)  $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$

【解法】

因数分解は2ステップで必ず解ける。

- ①最低次の文字で整理する ※次数が同じなら好きな文字でOK
- ②因数分解の公式を使う

《補足》

なし

**例題 16** 因数分解の工夫〔5〕…共通部分の利用

★★☆☆

次の式を因数分解せよ。

(1)  $(x - 3y)^2 - 5(x - 3y) + 6$

(2)  $(x^2 - 3x)(x^2 - 3x - 2) - 8$

(3)  $(x + 1)(x + 3)(x + 5)(x + 7) + 15$

【解法】

因数分解は2ステップで必ず解ける。

- ①最低次の文字で整理する ※次数が同じなら好きな文字でOK
- ②因数分解の公式を使う

《補足》

式の展開でやった「置き換える工夫」を行う。これは自然に使いたいところ。

**例題 18** 3次の因数分解

★★☆☆

次の式を因数分解せよ。

(1)  $8x^3 - 1$

(2)  $x^3 + 12x^2 + 48x + 64$

(3)  $x^6 - 7x^3 - 8$

(4)  $a^6 - b^6$

【解法】

因数分解は2ステップで必ず解ける。

- ①最低次の文字で整理する ※次数が同じなら好きな文字でOK
- ②因数分解の公式を使う