

# はじめに

数学の成績を決めるのは、**典型問題が何問解けるようになったか?** である。

そのためFocus Goldのような網羅系問題集を徹底していくわけだが、**多くの人が”その問題”の解き方を、1対1で覚えてしまいがちである。**

これでは時間がかかる上に、初見の問題に対応しづらい。

当教材では**関連テーマでまとめ直し、抽象化した解法を提示した。**”その問題”でなく”その手の問題”の解き方を示したということだ。

1つの解法でより多くの問題が解けることが実感でき、応用性も高まるであろう。

## 凡例

### 【解法】

抽象化した解法。IF-THENの構文（～という特徴があれば、～と解く）で書かれており、問題の特徴と打ち手をセットで覚えられる。手元のFocus Goldにメモするとよいだろう。

### 《補足》

さまざまな補足を記載した。

---

## 第1章 数と式

### 式の展開

式の展開は、端からかければ必ず解ける。ただ計算が大変であるため、さまざまな**工夫**を学んでいく。

このように、知らないと解けない解法だけでなく、**ラクに解くための解法**を学ぶのが高校数学だ。

実際、Focus Goldの問題の**約1割**が、ラクに解くための解法を学ぶ問題である。

<b>例題 2</b>	<b>乗法公式による展開</b>	****
次の式を展開せよ。		
(1) $(x-3)^2$	(2) $(2x+5y)(2x-5y)$	(3) $(3x+4)(2x-7)$
(4) $(2x+y-3z)^2$	(5) $(2x+3y)^3$	(6) $(3x+1)(9x^2-3x+1)$

### 【解法】

式の展開は端からかければ解けるが、工夫してラクに解きたい。

### 《補足》

式の展開では、**展開公式**が使えるとラク。

例題 3

展開の工夫(1) おき換え

\*\*\*\*

次の式を展開せよ。

(1)  $(x+y+3)(x+y-1)$

(2)  $(x^2-x+1)(x^2-3x+1)$

(3)  $(2x+3y-z)(2x-3y+z)$

(4)  $(a-b+c+d)(a-b-c-d)$

【解法】

式の展開は端からかければ解けるが、工夫してラクに解きたい。

《補足》

式の展開では、同じ項を置き換えられる場合、工夫をすると計算がラクになる。

例題 4

展開の工夫(2) 順序・組み合わせ

\*\*\*\*

次の式を展開せよ。

(1)  $(x-2)(x-3)(x+4)(x+5)$

(2)  $(x+1)(x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$

(3)  $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$

(4)  $(x-y)^2(x+y)^2(x^2+y^2)^2$

【解法】

式の展開は端からかければ解けるが、工夫してラクに解きたい。

《補足》

式の展開でカッコが2つの場合は、かける順番に工夫の余地はないが、**カッコが3つ以上ある場合は、工夫すると計算がラクになることがある。**

## 因数分解

因数分解は、次の2ステップを踏んで解く。

言い換えれば、この2ステップさえ踏めば**因数分解は何も考えずに解ける**。特に、**ステップ1**を忘れがちなので要注意。

**ステップ1：最低次の文字で整理する** ※次数が同じなら好きな文字でOK

**ステップ2：因数分解の公式を使う**

<因数分解の公式 (5つ) >

$$mx+my = m(x+y)$$

$$x^2-y^2 = (x+y)(x-y)$$

$$abx^2+(ad+bc)x+cd = (ax+b)(cx+d)$$

$$x^3+y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2)$$

$$x^3+3x^2y+3xy^2+y^3 = (x+y)^3$$

例題 5

因数分解の基本

\*\*\*\*

次の式を因数分解せよ。

- |                           |                       |
|---------------------------|-----------------------|
| (1) $3x^2y + 6xy + 9xy^2$ | (2) $ax - x - a + 1$  |
| (3) $4x^2 - 12xy + 9y^2$  | (4) $9x^3 + 6x^2 + x$ |
| (5) $x^2 - 4y^2$          | (6) $9x^2 - (x-1)^2$  |
| (7) $x^3 + 8$             | (8) $125x^3 - 27y^3$  |

【解法】

因数分解は2ステップで必ず解ける。

- ①最低次の文字で整理する ※次数が同じなら好きな文字でOK
- ②因数分解の公式を使う

《補足》

(6)はすでに因数分解できる形になっているので、ステップ1は飛ばしてよい。

例題 6

たすき掛け

\*\*\*\*

次の式を因数分解せよ。

- |                     |                      |                          |
|---------------------|----------------------|--------------------------|
| (1) $2x^2 + 7x + 3$ | (2) $6x^2 + 11x + 4$ | (3) $3x^2 - 10xy - 8y^2$ |
|---------------------|----------------------|--------------------------|

【解法】

因数分解は2ステップで必ず解ける。

- ①最低次の文字で整理する ※次数が同じなら好きな文字でOK
- ②因数分解の公式を使う

《補足》

なし

例題 7

次数が同じ場合(1)

\*\*\*\*

次の式を因数分解せよ。

- |                                       |                           |
|---------------------------------------|---------------------------|
| (1) $x^2 - (2a+5)x + (a+2)(a+3)$      | (2) $ax^2 - (a^2-1)x - a$ |
| (3) $(a^2-b^2)x^2 + 4abx - (a^2-b^2)$ |                           |

【解法】

因数分解は2ステップで必ず解ける。

- ①最低次の文字で整理する ※次数が同じなら好きな文字でOK
- ②因数分解の公式を使う

《補足》

- (1)(2) ①a,xはどちらも2次。すでにxで整理されている。②因数分解の公式を使う。  
 (3) ①a,b,xはいずれも2次。すでにxで整理されている。②因数分解の公式を使う。

例題 8

次数が同じ場合②

\*\*\*\*

次の式を因数分解せよ。

(1)  $x^2 + 3xy + 2y^2 + 2x + 3y + 1$

(石巻専修大)

(2)  $2x^2 - 5xy - 3y^2 + x + 11y - 6$

(愛知学泉大)

【解法】

因数分解は2ステップで必ず解ける。

- ①最低次の文字で整理する ※次数が同じなら好きな文字でOK
- ②因数分解の公式を使う

《補足》

- ①x,y はどちらも2次。x,yどちらかで整理する。
- ②因数分解の公式を使う。

例題 9

次数の低い文字に着目

\*\*\*\*

次の式を因数分解せよ。

(1)  $x^3 + x^2y + 2xy + y^2 - 1$

(2)  $x^2 + y^2 - yz + zx - 2xy$

【解法】

因数分解は2ステップで必ず解ける。

- ①最低次の文字で整理する ※次数が同じなら好きな文字でOK
- ②因数分解の公式を使う

《補足》

- (1) 最低次の文字はy(=1次)である。xで整理したらアウト。
- (2) 最低次の文字はz(=1次)である。xやyで整理したらアウト。

例題 10

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$  の利用

\*\*\*\*

次の式を因数分解せよ。

(1)  $x^4 - 16y^4$

(2)  $(x^2 + y^2)^2 - 4x^2y^2$

(3)  $(x - y)^3 - x + y$

(4)  $x^2 - y^2 - z^2 - 2yz$

(5)  $a^2 + b^2 - c^2 - d^2 + 2ab - 2cd$

【解法】

因数分解は2ステップで必ず解ける。

- ①最低次の文字で整理する ※次数が同じなら好きな文字でOK
- ②因数分解の公式を使う

《補足》

すでに $a^2 - b^2$ の形になっているものは、そのまま因数分解してOK

例題 11

おき換えによる因数分解

\*\*\*\*

次の式を因数分解せよ.

- (1)  $(x+2y)^2-5(x+2y)+6$       (2)  $(x^2-4x+2)(x^2-4x-4)-7$   
 (3)  $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24$

【解法】

因数分解は2ステップで必ず解ける。

- ①最低次の文字で整理する ※次数が同じなら好きな文字でOK  
 ②因数分解の公式を使う

《補足》

式の展開でやった「置き換える工夫」を行う。これは自然に使いたいところ。

例題 12

次数が同じ場合③

\*\*\*\*

次の式を因数分解せよ.

- (1)  $(a+b)(b+c)(c+a)+abc$   
 (2)  $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$

【解法】

因数分解は2ステップで必ず解ける。

- ①最低次の文字で整理する ※次数が同じなら好きな文字でOK  
 ②因数分解の公式を使う

《補足》

①a,b,cはいずれも同じ次数。好きな文字で整理したらいい。②因数分解の公式を使う。

例題 13

特殊な3次式の因数分解

\*\*\*\*

- (1)  $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$  を利用して、 $a^3+b^3+c^3-3abc$  を因数分解せよ.

- (2) (1)の結果を利用して、次の式を因数分解せよ.

(ア)  $x^3+y^3+3xy-1$       (イ)  $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$

【解法】

$a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$  は暗記事項。

《補足》

右辺の  $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca = 1/2\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} \geq 0$  も使うことがあるので覚えておこう。