§　2変数関数の最大最小

①文字消去で1変数に

[鉄則 等式の条件]
→1文字消去が原則

②存在条件(逆像法と同じ考え)
※図示できる場合を特に、線形計画法という
③対称式…実数条件を反映する
④文字固定(予選決勝法)…どの文字を固定するかによってできないことがあるので注意&3変数以上は文字固定が最有力
⑤置換…柔軟に
※典型的なもの
1 条件式が円、楕円→$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta$
2 同次式→ $\dfrac{x}{y} = t$ …y＝0に注意
⑥有名不等式の利用
1 コーシーシュワルツ(2文字と3文字がある)
2 相加相乗(和の最小or積の最大)

※基底の変換…[受験の月 参照]

A　$2x + y = 2,\quad x \geq 0,\quad y \geq 0$のとき

　(1)xyの最大値、最小値

　(2)$x^2y^2 + 4x^2 + y^2 + 2xy$ の最大値と最小値

B　$x - 2y - 4z = -1,\ x^2 + y^2 - 3z^2 = 5$ のとき $x - y - 3z$ の最大値と最小値

C　a, b, c を $0 \leq a \leq b \leq c$ かつ $a + b + c = 7$ を満たす実数とする。

　このとき，$ab,\ bc,\ ca$ の最大値

D 実数a, bは $0 \leq a < b$ を満たす定数とする。実数x, yが

$$x \geq 0,\ y \geq 0,\ a \leq x + y \leq b$$

を満たして動くとき，$(x^2+1)(y^2+1)$ の最大値と最小値

E $\dfrac{a+b}{2} < \sqrt{ab} + \dfrac{k}{\sqrt{ab}}$ かつ $a > b > 0$ を満たす整数a, bが存在するような実数kの範囲を求めよ。

F 3辺の長さがa, b, cの直方体を，長さがbの1辺を回転軸として90度回転させるとき，直方体が通過してできる立体をVとする。

(1) Vの体積をa, b, cを用いて表せ。

(2) $a + b + c = 1$ のとき，Vの体積のとりうる値の範囲を求めよ。

G $4x^2 + 9y^2 = 36$ のとき，$2x^2 + xy + 4y^2$の最大値と最小値

H $a \geq b > 0$とする。自然数nに対して，次の不等式を示せ。

$$a^n - b^n \leq \frac{n}{2}(a-b)(a^{n-1} + b^{n-1})$$

I $4x^2 - 8xy + 10y^2 = 1$ のとき，$x^2 + y^2$ の最大値と最小値

J 正の実数x, y, zが$\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{y} + \dfrac{3}{z} = 1$を満たすとき、$(x-1)(y-2)(z-3)$の最小値

§ ３次方程式の虚数解

実数係数の3次方程式が虚数解$(p+qi)$をもつとき

①$\{x-(p+qi)\}\{x-(p-qi)\}$で割り切れることに着目

②$p+qi, p-qi$以外の解は必ず実数だから，それをrとおいて解と係数を利用

※ほとんど②

※「◎方程式の解の扱い」に通じる

A　aを実数とする。複素数zについての３次方程式 $z^3-3z^2+4z-a=0$ の解が表す複素数平面上の点のうち，領域$|z|<2$に含まれるものの個数をaの値で場合分けして求めよ。

B　実数kに対して，$z^3+3z=k$ $\cdots(*)$ を考える。

(1) $(*)$は実数解をただ1つもつことを示せ。

(2) k が $-4 \leq k \leq 4$ を満たしながら動くとき，$(*)$の解となる複素数zがとりうる範囲を複素数平面上に図示せよ。

C　a, bを実数とする。３次方程式 $x^3+ax^2+bx+1=0$ は3つの複素数からなる解$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$をもち，相異なる$i, j$に対し，$|\alpha_i-\alpha_j|=\sqrt{3}$を満たす。このような$a, b$の組をすべて求めよ。

§ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum$ の求め方

① シグマの中身を計算する(公式，階差への変形)
② 区分求積法
③ 短冊評価などによる挟み
④ シグマの中身を，シグマ計算できる形で挟む

A $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{4k+3}{k(k+1)(k+2)}$ を求めよ。

B nを正の整数とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin nx\sin x|\,dx$ を求めよ。

(「定積分の評価」参照)

C $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n^2}\right)$ を求めよ

D 正の整数nに対して，$\displaystyle S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)$ とする。

(1) 不等式 $\displaystyle\frac{x}{2+x}\leq\sqrt{1+x}-1\leq\frac{x}{2}$ が成り立つことを示せ。

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$ を求めよ。

§ 円と放物線が接する条件

① 接点における法線が円の中心を通る

② x^2を消去して得られるyの方程式が，特定の範囲に重解をもつ

※特定の場合のみ

※ y消去なら問題なし(なぜyの重解条件は限定的なのか理解する)

③ 放物線上の任意の点と円の中心との距離の最小値が半径に一致する
(この方針は最も汎用性が高い。cf.東大理系数学2023)

A xy平面上に曲線$C: y = x^2 \left(0 \leq x \leq \dfrac{1}{2}\right)$と直線m: $x = \dfrac{1}{2}$ がある。

Cとm，x軸で 囲まれた部分をDとする。D内に中心があり，Cとmおよびx軸のすべてに接する円の半径を求めよ。

B 放物線 $y = \dfrac{5}{8}x^2$と点A(0，2)を中心とする円が異なる2点で接するとき，
この円と放物線で囲まれる部分の面積を求めよ。

C 放物線 $y = x^2$と円$x^2 + (y-p)^2 = 1$とが異なる2つの共有点A，Bで共通の接線をもつとき，A，Bを両端とする円の弧の短いほうと放物線とで囲まれる図形の面積を求めよ。