物　　理

(問　題)

2012年度

〈2012　H24060015（物理）〉

注　意　事　項

1. 問題冊子および記述解答用紙は，試験開始の指示があるまで開かないこと。
2. 問題は２～５ページに記載されている。試験中に問題冊子の印刷の乱れ，解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督員に知らせること。
3. 解答はすべて解答用紙の所定欄にＨＢの黒鉛筆またはＨＢのシャープペンシルで記入すること。欄外の余白には何も記入しないこと。
4. 試験が開始されたらただちに，解答用紙の所定欄（２か所）に受験番号および氏名を正確に丁寧に記入すること。
5. いかなる場合でも，解答用紙は必ず提出すること。
6. 試験終了後，問題冊子は持ち帰ること。

［I］ 以下の問題の答を解答用紙の所定欄に記入せよ。

地球や太陽など巨大な天体の質量を、物理学者たちはどのようにして知ることができたのだろうか。事実を多少簡単化してその過程をたどってみることにしよう。

ニュートンが発見した万有引力の法則を地上の物体を用いて検証し、万有引力定数 G の値を初めて決定したのは 18 世紀英国の物理学者キャベンディッシュであり、地上の物体の間に働く極めて微弱な引力を測定するために彼が用いたのは、ねじれ秤という装置であった。

予備実験（図Ｉ－１及び図Ｉ－２参照）

二つの球 P、Q を固定した細い棒を、中点 O に一方を固定した細い吊（つ）り糸で鉛直につり下げた。吊り糸は図Ｉ－１では一点に見える。球 P、Q に、大きさ f の逆向きの力を加えたときのねじれの角度 θ を測定し、θ を横軸、f を縦軸にプロットしたのが図Ｉ－２である。この図から、θ と f の間には比例関係 $f = k\theta$ （k は正の比例係数）があることが分かる。

万有引力定数を測定する実験（図Ｉ－３参照）

予備実験の後、平衡状態 $\theta = 0$ にある棒の両端近くの対称の位置に固定球 A、B を置いたところ、棒は θ_0 だけねじれて新しい平衡状態に達した。このとき、固定球と棒の端の球の中心間距離は $\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{BQ}} = r_0$ であった。

球形物体がその外部に及ぼす万有引力は、物体の全質量がその中心に集中していると仮定した場合と全く同じになるということが、積分法を用いた詳しい計算により分かっている。以下の問に答えよ。

問 1　固定球と棒の端の球の質量をそれぞれ M、m とするとき、これらの間に働く万有引力の大きさ $|\vec{F}|$ を G、M、m、r_0 を用いて表せ。

問 2　上の $|\vec{F}|$ が $k\theta_0$ とも書けることに注目しよう。図Ｉ－２の実験から比例係数 k は分かっており、M、m、r_0 も測定から分かる。従って唯一の未知数は万有引力定数 G である。G を、M、m、r_0、k、θ_0 を用いて表せ。

問 3　キャベンディッシュは上記の実験で万有引力定数として、現在知られている値 $G = 6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$ からの誤差がわずか 1.2 ％という極めて精度の良い値を得た。彼は、地球の表面における重力加速度 g が、地球が地上の物体に及ぼす万有引力によるという考えから、地球の質量 M_{E} を求めることに成功した。但し、地球の半径 R_{E} は古代ギリシャ以来の幾何学的方法で知られていた。地球の質量 M_{E} を G、g、R_{E} を用いて表せ。

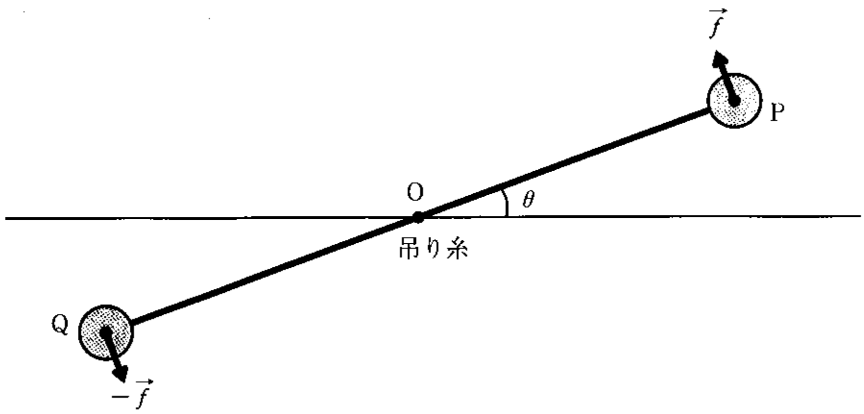
問 4　地球の質量 M_{E} を有効数字 2 桁で計算せよ。ここでは $G = 6.7 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$、$g = 9.8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$、$R_{\mathrm{E}} = 6.4 \times 10^6\ \mathrm{m}$ とせよ。

問 5　地球の平均密度 ρ はいくらか、有効数字 2 桁で計算せよ。これは水の密度の何倍か。

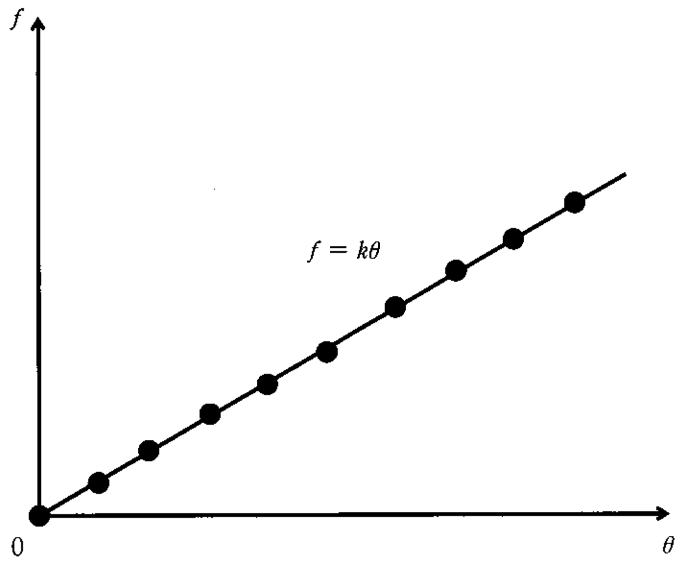
問 6　地球の公転軌道を円とみなし、その半径を L、角速度を ω とする。このとき、太陽質量 M_{S} を、G、L、ω を用いて表せ。

問 7　1 年を 365 日として地球の公転角速度 ω を有効数字 2 桁まで求めよ。

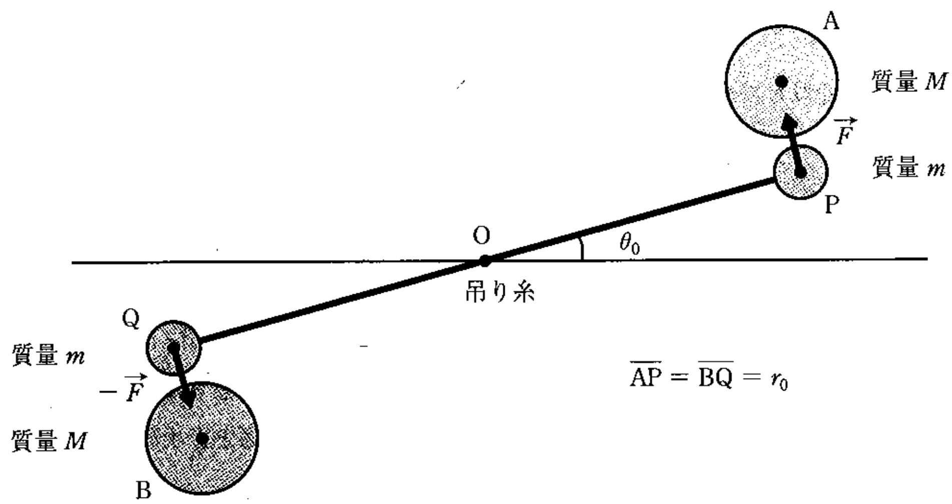
問 8　$L = 1.5 \times 10^{11}\ \mathrm{m}$ とし、前問の結果を用いて太陽質量 M_{S} を有効数字 2 桁で計算せよ。


$\vec{f}$
P
O
θ
吊り糸
Q
$-\vec{f}$

図Ｉ－１


f
$f = k\theta$
0
θ

図Ｉ－２


A
質量 M
$\vec{F}$
質量 m
P
O
θ_0
吊り糸
Q
質量 m
$-\vec{F}$
質量 M
B
$\overline{AP} = \overline{BQ} = r_0$

図Ｉ－３

［Ⅱ］ 以下の問題の答を解答用紙の所定欄に記入せよ。

図Ⅱのように波長 λ の平面電磁波が、θ の方向から位置AとBにある2つのアンテナに入射している。その波面の一つを $\overline{\mathrm{HB}}$ とし、以下の問に答えよ。角度の単位は rad（ラジアン）である。

<u>θ が変化しない場合</u>

問1 $\overline{\mathrm{AH}}$ は波長 λ の何倍か、D、θ、λ を用いて $\overline{\mathrm{AH}}/\lambda$ を表せ。

$\overline{\mathrm{AH}}/\lambda =$ [　　　　　　　　　　　]

A、Bは地球の赤道上にある。赤道面を延長した平面上にある極めて遠方の天体からの電磁波を、この2つのアンテナで受信する場合を考えよう。アンテナの感度はどの方向からの電磁波に対しても同じ（等方的）であるとする。<u>以下では電磁波の角振動数 $\omega = 2\pi c/\lambda$ が現れるが、解答欄には ω を用いず λ を含む形で書くこと</u>。c は光速である。

問2 アンテナBの出力電圧の時間変化が $V_\mathrm{B}(t) = V_0 \cos \omega t$ のとき、アンテナAの出力電圧 $V_\mathrm{A}(t)$ を求めよ。ただし振幅 V_0 は正の定数である。

$V_\mathrm{A}(t) = V_0 \cos(\omega t -$ [　　　　　　　　　　　]$)$　　　　　　　　　　（1）

<u>θ が時間 t とともに変化する場合</u>

以下では θ が地球の自転につれてゆっくり $\theta(t)$ のように変化する場合を考える。公転運動は無視してよい。

問3 地球の自転により $\theta(t)$ は地球の自転角速度 Ω の関数となる。$\theta = 0$ のときを $t = 0$ として、$\theta(t)$ を求めよ。

$\theta(t) =$ [　　　　　　　　　　　]　　　　　　　　　　（2）

問4 アンテナAとBの出力を等しい長さのケーブルで合成した場合の出力 $V_\mathrm{A}(t) + V_\mathrm{B}(t)$ を求めよう。$t = 0$ のときは $\theta(0) = 0$ なので $V_\mathrm{A}(t) + V_\mathrm{B}(t)$ は最大値 [　　　　　　　] をとる。

θ が 1 rad と比べて十分に小さいとき $\sin\theta$ を θ と近似できる。この場合に $V_\mathrm{A}(t) + V_\mathrm{B}(t)$ の振る舞いを調べよう。

問5 例えば時刻 $t = 0$ から1分過ぎた時の θ を、有効数字1桁で求めると [　　　　　　　rad] であるから、その場合は $\sin\theta$ を θ と近似してよい。

問6 （1）式の $\sin\theta$ を θ と近似し、θ が（2）式に従って時間の関数 $\theta(t)$ であることを考慮すると、（1）式は Ω を含む形にかける。

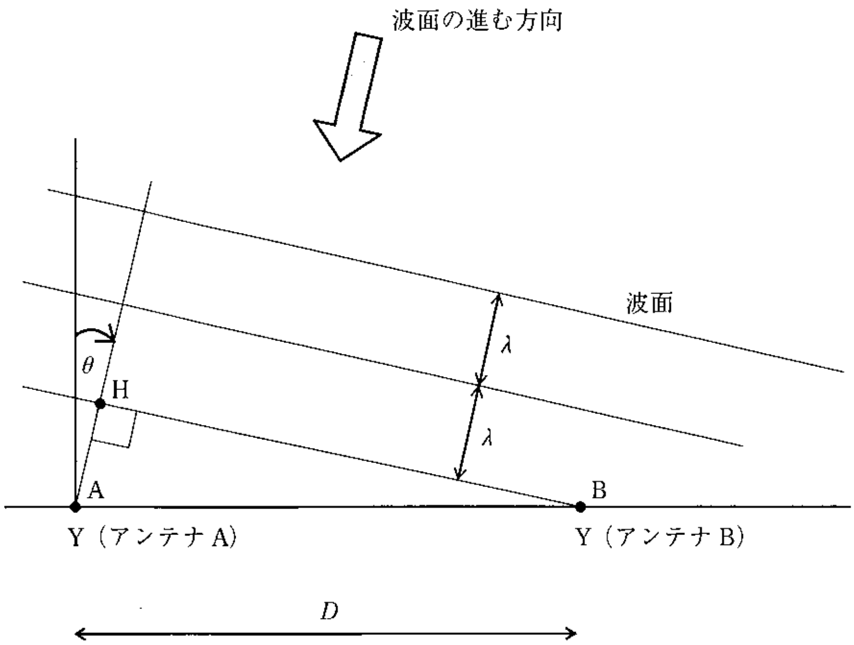
$V_\mathrm{A}(t) = V_0 \cos(\omega t -$ [　　　　　　　　　　　]$)$

問7 $V_\mathrm{A}(t) + V_\mathrm{B}(t)$ は2つの三角関数の和であるが、これを2つの三角関数の積に変形すると、次の式を得る。

$V_\mathrm{A}(t) + V_\mathrm{B}(t) = 2V_0 \cos(\omega t - \pi D \Omega t/\lambda)$[　　　　　　　　　　　]　　　　（3）

問8 $\sin\theta$ を θ と近似できる場合であっても、$t = 0$ からスタートして $V_\mathrm{A}(t) + V_\mathrm{B}(t)$ が $t = 0$ での値を再びとるのは極めて特別な場合である。その条件を求めよう。それは、（3）式の右辺に積となって現れる2つの三角関数が同時に1あるいは -1 のときに限る。このことから ω と Ω に対する条件を求めると、次のようになる。

$(\omega/\Omega)(\lambda/D) =$ [　　　　　　　　　　　]



図Ⅱ

〔以　下　余　白〕