数　　　学
（問　題）

2020 年度

〈2020　R02140015（数学）〉

注 意 事 項

1. 試験開始の指示があるまで、問題冊子および解答用紙には手を触れないこと。
2. 問題は４ ～ ５ページに記載されている。試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚損等に気付いた場合は、手を挙げて監督員に知らせること。
3. 解答はすべて、ＨＢの黒鉛筆またはＨＢのシャープペンシルで記入すること。
4. 記述解答用紙記入上の注意
（１）記述解答用紙の所定欄(2 カ所)に、氏名および受験番号を正確に丁寧に記入すること。
（２）所定欄以外に受験番号・氏名を記入した解答用紙は採点の対象外となる場合がある。
（３）受験番号の記入にあたっては、次の数字見本にしたがい、読みやすいように、正確に丁寧に記入すること。

数字見本	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

（４）受験番号は右詰めで記入し、余白が生じる場合でも受験番号の前に「0」を記入しないこと。

（例）3825 番⇒

万	千	百	十	一
	3	8	2	5

5. 解答はすべて所定の解答欄に記入すること。所定欄以外に何かを記入した解答用紙は採点の対象外となる場合がある。
6. 試験終了の指示が出たら、すぐに解答をやめ、筆記用具を置き解答用紙を裏返しにすること。
7. いかなる場合でも、解答用紙は必ず提出すること。
8. 試験終了後、問題用紙は持ち帰ること。

$\boxed{1}$ 次の各問の解答を解答用紙の所定欄に記入せよ。

(1) n を偶数とする。袋の中に白玉 n 個と赤玉 1 個が入っている。2 人が交互に 1 つずつ袋から玉を無作為に取り出し，取り出した玉は袋に戻さない。赤玉を取り出した人が勝利とするとき，先に取り始めた人が勝利する確率を求めよ。

(2) 座標空間において，原点 O を中心とし半径が $\sqrt{5}$ の球面を S とする。点 A$(1, 1, 1)$ からベクトル $\vec{u} = (0, 1, -1)$ と同じ向きに出た光線が球面 S に点 B で当たり，反射して球面 S の点 C に到達したとする。ただし反射光は，点 O, A, B が定める平面上を，直線 OB が∠ABC を二等分するように進むものとする。点 C の座標を求めよ。

(3) 曲線 $y = \log x$ を C とし，原点を通り C と接する直線を l とする。l と C と x 軸によって囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転して得られる立体の体積を求めよ。

(4) $f(x)$ は $x > 0$ で定義された連続関数で，$f(2) = 1$ をみたす。また，任意の $a > 0$ と $b > 0$ に対して，

$$\int_{a^2}^{a^3 b} f(t)dt - \int_{a}^{a^2} f(t)dt$$

の値は a によらないものとする。このとき，関数 $f(x)$ を求めよ。

$\boxed{2}$ 半径 1 の円に外接する AB = AC の二等辺三角形 ABC において∠BAC = 2θ とする。

(1) AC を θ の三角関数を用いて表せ。

(2) AC が最小となるときの $\sin\theta$ を求めよ。

3 座標平面上で，C_0 を楕円 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ とし，$n \geqq 1$ について，C_0 と相似な楕円 C_n を順番に次のように定める。

C_n の短軸は，y 軸と平行な C_{n-1} の弦で，C_{n-1} の中心より右にあり，
その長さは C_{n-1} の短軸の長さの半分である。

(1) $n \geqq 0$ について，楕円 C_n の中心の x 座標を a_n とする。a_n を n を用いて表せ。

(2) $n \geqq 0$ について，C_n で囲まれた部分を D_n とし，D_0，D_1，...，D_n の少なくとも 1 つに含まれる点の全体がなす領域 $D_0 \cup D_1 \cup \cdots \cup D_n$ の面積を S_n とする。$\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ。

4 座標平面上で，定数 $k>0$ に対し，曲線 $y=\frac{k}{\sqrt{1+x^2}}$ の $0 \leqq x \leqq 1$ の部分を C_k とする。

(1) 曲線 C_k 上の点と原点との距離の最大値 $M(k)$ を求めよ。

(2) 原点を中心に曲線 C_k を 1 回転させるとき，C_k が通る部分の面積 $S(k)$ を求めよ。

［以 下 余 白］