# 数　学
## 問　題
2019年度

〈H31130017〉

## 注　意　事　項

1. この試験では、この問題冊子のほかに、解答用紙３種類（その１、その２、その３）を配付します。
2. 試験開始の指示があるまで、問題冊子および解答用紙には手を触れないでください。
3. 問題は４～５ページに記載されています。試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚損等に気付いた場合は、手を挙げて監督員に知らせてください。
4. 解答はすべて、ＨＢの黒鉛筆またはＨＢのシャープペンシルで記入してください。
5. 解答用紙記入上の注意
   (1) 解答用紙の所定欄（２カ所）に、氏名および受験番号を正確に丁寧に記入してください。
   (2) 所定欄以外に受験番号・氏名を記入した解答用紙は採点の対象外となる場合があります。
   (3) 受験番号の記入にあたっては、次の数字見本にしたがい、読みやすいように、正確に丁寧に記入してください。

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 数字見本 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

   (4) 受験番号は右詰めで記入し、余白が生じる場合でも受験番号の前に「０」を記入しないでください。

（例）　3825番⇒

| 万 | 千 | 百 | 十 | 一 |
|---|---|---|---|---|
| | 3 | 8 | 2 | 5 |

6. 解答はすべて所定の解答欄に記入してください。所定欄以外に何かを記入した解答用紙は採点の対象外となる場合があります。
7. 下書きは問題冊子の余白を使用してください。
8. 試験終了の指示が出たら、すぐに解答をやめ、筆記用具を置き解答用紙を裏返しにしてください。
9. 問題冊子は持ち帰ってください。
10. いかなる場合でも、解答用紙は必ず提出してください。

このページは下書きに使用してよい。

このページは下書きに使用してよい。

[ I ] 自然数 $n$ について，次のような命題を考える。

$$(*) \quad n^2+1,\ 2n^2+3,\ 6n^2+5 \text{ がすべて素数である}$$

(1) $n=5k$ ($k$ は自然数) のとき，$n$ は $(*)$ を満たさないことを示せ。

(2) $(*)$ を満たすような $n$ は $n=1,2$ のみであることを示せ。

[ II ] $n$ は 3 以上の自然数とする。面積 1 の正 $n$ 角形 $P_n$ を考え，その周の長さを $L_n$ とする。次の問に答えよ。

(1) $(L_n)^2$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} L_n$ を求めよ。

(3) $n<k$ ならば $(L_n)^2>(L_k)^2$ となることを示せ。

[ III ] 実数 $x$ に対し $[x]$ を $x-1<[x]\leqq x$ を満たす整数とする。次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\frac{1}{\sin\frac{1}{n}}\right]$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}\left(1+\left[\sqrt{2}\right]+\left[\sqrt{3}\right]+\cdots+\left[\sqrt{n}\right]\right)$

[IV]　原点 O を中心とする半径 1 の球面 $S$ に，四面体 PABC が内接している。点 P と三角形 ABC の重心 G を通る直線が球面 $S$ と交わる P と異なる点を Q とする。また，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{c}$, $\overrightarrow{\mathrm{PO}}=\vec{p}$ とする。次の問に答えよ。

(1) $\vec{a}\cdot\vec{a}=2\,\vec{a}\cdot\vec{p}$ を示せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=k\,\overrightarrow{\mathrm{PG}}$ となる $k$ を，$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ を用いて表せ。

(3) $\mathrm{PG}:\mathrm{PQ}=1:3$ とする。角 $\angle\mathrm{APB}$, $\angle\mathrm{BPC}$, $\angle\mathrm{CPA}$ に対して，次のいずれかが成り立つことを示せ。

・3 つの角のうち，少なくとも 1 つは鋭角，少なくとも 1 つは鈍角である。

・3 つの角は全て直角である。

(4) $\mathrm{PG}:\mathrm{PQ}=1:3$, $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ とする。PQ を求めよ。さらに，四面体 PABC の体積を求めよ。

[V]　実数 $a$ は $-\pi\leqq a\leqq\pi$ の範囲にあるとする。極方程式

$$r=1+\cos\theta \quad \left(a\leqq\theta\leqq a+\frac{2\pi}{3}\right)$$

と表わされる座標平面上の曲線の長さを $\ell(a)$ とする。次の問に答えよ。

(1) この曲線を $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ で表したとき，$\sqrt{\left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{d\theta}\right)^2}$ を $\theta$ を用いて表せ。

(2) $-\pi\leqq a\leqq\dfrac{\pi}{3}$ のとき，$\ell(a)$ を求めよ。

(3) 横軸 $a$，縦軸 $\ell$ の座標平面上に $\ell=\ell(a)$ $(-\pi\leqq a\leqq\pi)$ のグラフを書き，$\ell(a)$ の最大値，最小値を求めよ。

[以　下　余　白]

このページは下書きに使用してよい。

このページは下書きに使用してよい。