数　　学

(問　題)

2019年度

〈2019　H31130015（数学）〉

注　意　事　項

1. 試験開始の指示があるまで，問題冊子および解答用紙には手を触れないこと。
2. 問題は４～５ページに記載されている。試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚損等に気付いた場合は，手を挙げて監督員に知らせること。
3. 解答はすべて，ＨＢの黒鉛筆またはＨＢのシャープペンシルで記入すること。
4. 解答用紙記入上の注意

(1) 解答用紙の所定欄（２カ所）に，氏名および受験番号を正確に丁寧に記入すること。

(2) 所定欄以外に受験番号・氏名を記入した解答用紙は採点の対象外となる場合がある。

(3) 受験番号の記入にあたっては，次の数字見本にしたがい，読みやすいように，正確に丁寧に記入すること。

数字見本	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

(4) 受験番号は右詰めで記入し，余白が生じる場合でも受験番号の前に「０」を記入しないこと。

(例)　3825番⇒

万	千	百	十	一
	3	8	2	5

5. 解答はすべて所定の解答欄に記入すること。所定欄以外に何かを記入した解答用紙は採点の対象外となる場合がある。
6. 試験終了の指示が出たら，すぐに解答をやめ，筆記用具を置き解答用紙を裏返しにすること。
7. いかなる場合でも，解答用紙は必ず提出すること。
8. 試験終了後，問題冊子は持ち帰ること。

$\boxed{1}$ 次の各問の解答を解答用紙の所定欄に記入せよ。

（1） 放物線 $y = x^2$ 上の点 (a, a^2) における接線と曲線 $y = x^3 - ax$ が相異なる 3 点で交わるとき，a のとりうる値の範囲を求めよ。

（2） 曲線 $y = \sin x - \dfrac{2}{\pi}x$ $(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2})$ と x 軸で囲まれた部分を x 軸のまわりに 1 回転して得られる立体の体積を求めよ。

（3） $a_1 = a_2 = 1$，$a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$ とする。
i を虚数単位とする。$\displaystyle\sum_{n=1}^{2019} i^{a_n}$ の値を求めよ。

（4） 以下の $\boxed{}$ に当てはまる数を答えよ。
a を正の実数とする。$\left|z - \dfrac{1}{4}a\right| = \dfrac{1}{2}|z - a|$ を満たすすべての複素数 z が，$|\arg(1 - z)| \leqq \dfrac{\pi}{4}$ となるための必要十分条件は $a \leqq \boxed{}$ となることである。ここで $\arg(1 - z)$ は $1 - z$ の偏角である。ただし $1 - z$ の偏角は，$-\pi$ より大きく π 以下の範囲で考える。

$\boxed{2}$ 正三角形ABCがあり，コインが頂点Aの上に表向きにおかれている。サイコロを投げ，

- $1, 2$ の目が出たときは，表裏を変えずにコインを時計回りに隣の頂点に移動させる，
- $3, 4$ の目が出たときは，表裏を変えずにコインを反時計回りに隣の頂点に移動させる，
- $5, 6$ の目が出たときは，コインの位置を変えずにコインの表裏を入れ替える，

という操作を繰り返す。ただし，頂点 A, B, C はこの順に時計回りに並んでいるとする。以下の問に答えよ。

（1） n 回サイコロを投げた後にコインが表を向いている確率を求めよ。

（2） n 回サイコロを投げた後に，コインが頂点Aの上に表向きにおかれている確率を a_n とする。$a_{10} = \dfrac{1}{6} + \dfrac{683}{2 \times 3^{10}}$ であることを用いて a_{11} を求めよ。

$\boxed{3}$ (1) m, n を自然数とし，$n \geqq 2$ とする。このとき

$$\log(1+\frac{n}{m}) < \sum_{k=m}^{m+n-1} \frac{1}{k} < \log(1+\frac{n}{m}) + \frac{n}{m(m+n)}$$

を証明せよ。ただし $\displaystyle\sum_{k=m}^{m+n-1} \frac{1}{k} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{m+n-1}$ である。

(2) 2以上の自然数 n に対して

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2n+k)(n+1-k)}$$
$$b_n = \frac{\log n}{n}$$

とおく。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

を求めよ。

$\boxed{4}$ 四角形 P の対角線の長さの最大値を $d(P)$ で表す。P_1 を1辺の長さが1の正方形とする。$P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8, P_9, P_{10}$ は平行四辺形で，$n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ のそれぞれについて，P_n の頂点のうちちょうど3つは P_{n+1} の頂点でもあるとするとき，以下の問に答えよ。

(1) $d(P_{10})$ のとりうる値の最小値 m を求めよ。

(2) $d(P_{10})$ のとりうる値の最大値 M を求めよ。

[以　下　余　白]