

数 学 問 題

2017年度

〈H29110017〉

注 意 事 項

1. この試験では、この問題冊子のほかに、解答用紙3種類（その1、その2、その3）を配付します。
2. 試験開始の指示があるまで、問題冊子および解答用紙には手を触れないでください。
3. 問題は4～6ページに記載されています。試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚損等に気付いた場合は、手を挙げて監督員に知らせてください。
4. 解答はすべて、HBの黒鉛筆またはHBのシャープペンシルで記入してください。
5. 解答用紙記入上の注意
 - (1) 解答用紙の所定欄（2カ所）に、氏名および受験番号を正確に丁寧に記入してください。
 - (2) 所定欄以外に受験番号・氏名を書かないでください。
 - (3) 受験番号の記入にあたっては、次の数字見本にしたがい、読みやすいように、正確に丁寧に記入してください。

数 字 見 本	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
---------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

- (4) 受験番号は右詰めで記入し、余白が生じる場合でも受験番号の前に「0」を記入しないでください。

(例) 3825番⇒	万	千	百	十	一
		3	8	2	5

6. 解答はすべて所定の解答欄に記入してください。所定欄以外に何かを記入した解答用紙は採点の対象外となる場合があります。
7. 下書きは問題冊子の余白を使用してください。
8. 試験終了の指示が出たら、すぐに解答をやめ、筆記用具を置き解答用紙を裏返しにしてください。
9. 問題冊子は持ち帰ってください。
10. いかなる場合でも、解答用紙は必ず提出してください。

このページは下書きに使用してよい。

このページは下書きに使用してよい。

[I] $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i$ とおき、複素数 $1, \alpha, \bar{\alpha}$ に対応する複素数平面上の点をそれぞれ P, Q, R とする。次の問に答えよ。

- (1) 直線 PQ は複素数 β を用いて方程式 $\beta z + \bar{\beta} \bar{z} + 1 = 0$ で表される。この β を求めよ。
- (2) 点 z が直線 PQ 上を動くとき、点 $w = \frac{1}{z}$ が描く複素数平面上の図形を求めよ。
- (3) 点 z が三角形 PQR の周および内部を動くとき、点 $w = \frac{1}{z}$ の動く範囲を、複素数平面上に図示し、その面積を求めよ。

[II] 正の実数 a に対して

$$f(x) = (2 - ax)e^{-a(x-2)}$$

とする。次の問に答えよ。

- (1) $f(x)$ の増減を調べ、グラフの概形を描け。
- (2) $f(x)$ を最小にする x の値を p で表す。このとき

$$S = \int_0^p |f(x)| dx$$

を a を用いて表せ。

- (3) (2) の S を最小にする a の値を求めよ。

[III] 次の問に答えよ。

(1) 四面体 ABCD と四面体 AB_PCP の体積をそれぞれ V, V_P とする。

(i) $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AD}$ が成り立つとき、体積比 $\frac{V_P}{V}$ を求めよ。

(ii) $\overrightarrow{AP} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC} + d\overrightarrow{AD}$ が成り立つとき、体積比 $\frac{V_P}{V}$ を求めよ。

(2) 四面体 ABCD について、点 A, B, C, D の対面の面積をそれぞれ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ とする。原点を O として、

$$\overrightarrow{OI} = \frac{\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC} + \delta\overrightarrow{OD}}{\alpha + \beta + \gamma + \delta}$$

となる点 I を考える。四面体 ABCD の体積を V とするとき、3 点 A, B, C を通る平面と点 I の距離 r を求めよ。

(3) (2) の点 I は四面体 ABCD に内接する球の中心であることを示せ。

[IV] n を正の整数とする。試行の結果に応じて k 点 ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) が与えられるゲームがある。ここで k 点を獲得する確率は、ある $t > 0$ によって決まっており、これを $p_k(t)$ とする。このとき、確率 $p_k(t)$ は $a \geq 0$ に対して以下の関係式を満足するという。

$$p_0(t) = t^n, \quad p_k(t) = a \cdot \frac{n-k+1}{k} \cdot p_{k-1}(t) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

次の問に答えよ。

(1) $\sum_{k=0}^n p_k(t)$ の値を求めよ。

(2) a を t を用いて表せ。

(3) 各 k に対して、 $0 \leq t \leq 1$ の範囲で $p_k(t)$ を最大にするような t の値 T_k を求めよ。ただし、 $p_k(0) = 0$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$), $p_n(0) = 1$ と定める。

(4) $0 < t < 1$ なる t を与えたとき、(3) で求めた T_k に対して、

$$E = \sum_{k=0}^n T_k \cdot p_k(t)$$

とする。 E の値を求めよ。

[V] 3 次の整式 $f(x) = x^3 + x^2 + px + q$ (ただし, $p \neq q, q \neq 0$) , および $g(x) = \frac{-1}{x+1}$ が次の条件 (*) をみたすとする。

(*) $f(x) = 0$ の任意の解 α に対して $g(\alpha)$ も $f(x) = 0$ の解である。

次の問に答えよ。

- (1) p, q の値を求めよ。
- (2) $f(x) = 0$ は $-2 < x < 2$ の範囲に 3 つの実数解をもつことを示せ。
- (3) $f(x) = 0$ の任意の解を $2 \cos \theta$ とするとき, $2 \cos 2\theta, 2 \cos 3\theta$ も解であることを示せ。
- (4) $2 \cos \theta$ ($0 < \theta < \pi$) が $f(x) = 0$ の解であるとき, θ の値を求めよ。

[以 下 余 白]