

# 数 学

## 問 題

### 2016年度

〈 H28100017 〉

### 注 意 事 項

1. この試験では、この問題冊子のほかに、解答用紙3種類（その1、その2、その3）を配布します。
2. 試験開始の指示があるまで、問題冊子および解答用紙には手を触れないでください。
3. 問題は4～6ページに記載されています。試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚損等に気付いた場合は、手を挙げて監督員に知らせてください。
4. 解答はすべて、HBの黒鉛筆またはHBのシャープペンシルで記入してください。
5. 記述解答用紙記入上の注意
  - (1) 記述解答用紙の所定欄（2カ所）に、氏名および受験番号を正確に丁寧に記入してください。
  - (2) 所定欄以外に受験番号・氏名を書かないでください。
  - (3) 受験番号の記入にあたっては、次の数字見本にしたがい、読みやすいように、正確に丁寧に記入してください。

|         |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 数 字 見 本 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

- (4) 受験番号は右詰めで記入し、余白が生じる場合でも受験番号の前に「0」を記入しないでください。

(例) 3825番⇒

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 万 | 千 | 百 | 十 | 一 |
|   | 3 | 8 | 2 | 5 |

6. 解答はすべて所定の解答欄に記入してください。所定欄以外に何かを記入した解答用紙は採点の対象外となる場合があります。
7. 下書きは問題冊子の余白を使用してください。
8. 試験終了の指示が出たら、すぐに解答をやめ、筆記用具を置き解答用紙を裏返しにしてください。
9. 問題冊子は持ち帰ってください。
10. いかなる場合でも、解答用紙は必ず提出してください。

このページは下書きに使用してよい。

このページは下書きに使用してよい。

[I] 正の整数  $m, n$  に対して  $f(m, n)$  が次の等式を満たすように定められている。

$$\begin{cases} f(1, 1) = 1, & f(2, 2) = 6, & f(3, 3) = 20 \\ f(m, n) = 2f(m-1, n) & (m \geq 2) \\ f(m, n) + 3f(m, n-2) = 3f(m, n-1) + f(m, n-3) & (n \geq 4) \end{cases}$$

次の問に答えよ。

- (1)  $f(m, 1)$  および  $f(1, n)$  をそれぞれ  $m, n$  の式で表せ。
- (2)  $f(6, 32)$  の値を求めよ。
- (3) 任意の正の整数  $l$  に対して,  $f(m, n) = l$  を満たす正の整数  $m, n$  が存在することを示せ。

[II] 正方形 ABCD を底面, 点 P を頂点とする正四角錐 PABCD に内接する球について考える。ただし, 正四角錐とは, 頂点と底面の正方形の中心を結ぶ直線が底面と垂直になる角錐である。線分 AB の中点を M とし, 線分 AM および線分 PM の長さをそれぞれ  $a, b$  とする。次の問に答えよ。

- (1) 内接する球の半径を  $a, b$  を用いて表せ。
- (2)  $x = \frac{b}{a}$  と定めるとき,  $\frac{\text{内接する球の表面積}}{\text{正四角錐 PABCD の表面積}}$  を  $x$  で表わし, その最大値を求めよ。
- (3) (2) で最大値をとるときの正四角錐 PABCD の体積を  $a$  を用いて表せ。

[Ⅲ] 複素数  $z$  に対して

$$f(z) = \alpha z + \beta$$

とする。ただし、 $\alpha, \beta$  は複素数の定数で  $\alpha \neq 1$  とする。

$$f^1(z) = f(z), \quad f^n(z) = f(f^{n-1}(z)) \quad (n = 2, 3, \dots)$$

と定める。次の問に答えよ。

- (1)  $f^n(z)$  を  $\alpha, \beta, z, n$  を用いて表せ。
- (2)  $|\alpha| < 1$  のとき、すべての複素数  $z$  に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f^n(z) - \delta| = 0$$

が成り立つような複素数の定数  $\delta$  を求めよ。

- (3)  $|\alpha| = 1$  とする。複素数の列  $\{f^n(z)\}$  に少なくとも 3 つの異なる複素数  
が現れるとき、これらの  $f^n(z)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) は複素数平面内のある円  $C_z$   
上にある。円  $C_z$  の中心と半径を求めよ。

[Ⅳ]  $f(x) = x^3 - x$  とする。 $xy$  平面上の点  $(p, q)$  から曲線  $y = f(x)$  へ引いた接線を考える。次の問に答えよ。

- (1) 直線  $y = m(x - p) + q$  が曲線  $y = f(x)$  の接線となるための条件を  $m, p, q$   
を用いて表せ。
- (2) 点  $(p, q)$  から曲線  $y = f(x)$  に 3 本の接線を引くことができるとき、 $p, q$   
の条件を求めよ。
- (3) (2) の条件を満たす点  $(p, q)$  の範囲を図示せよ。

[V]  $xyz$  空間上に点  $A(0, 0, \sqrt{3})$  をとる。 $xy$  平面上の点  $P(a, b, 0)$  は、線分  $AP$  の長さが 2 で、 $a \geq 0, b \geq 0$  となるように動く。このとき線分  $AP$  がえがく図形を  $F$  とする。次の問に答えよ。

- (1) 点  $P$  の軌跡を  $xy$  平面上に図示せよ。
- (2) 点  $Q(x, y, z)$  を図形  $F$  上の点とするとき、 $z$  を  $x, y$  を用いて表せ。
- (3) 図形  $F$ 、座標平面  $x = 0, y = 0, z = 0$  によって囲まれる部分を  $x$  軸の周りに 1 回転してできる回転体を  $V$  とする。 $V$  の平面  $x = t$  による切り口の面積  $S(t)$  を、 $t$  を用いて表せ。
- (4)  $V$  の体積を求めよ。

[以 下 余 白]

このページは下書きに使用してよい。

