数　　　学

（問　題）

2016年度

〈2016　H28100015（数学）〉

注　意　事　項

1. 試験開始の指示があるまで，問題冊子および解答用紙には手を触れないこと。
2. 問題は４～５ページに記載されている。試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚損等に気付いた場合は，手を挙げて監督員に知らせること。
3. 解答はすべて，ＨＢの黒鉛筆またはＨＢのシャープペンシルで記入すること。
4. 解答用紙記入上の注意
   (1) 解答用紙の所定欄（２カ所）に，氏名および受験番号を正確に丁寧に記入すること。
   (2) 所定欄以外に受験番号・氏名を書いてはならない。
   (3) 受験番号の記入にあたっては，次の数字見本にしたがい，読みやすいように，正確に丁寧に記入すること。

数字見本	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

   (4) 受験番号は右詰めで記入し，余白が生じる場合でも受験番号の前に「０」を記入しないこと。

（例）　3825番⇒

万	千	百	十	一
	3	8	2	5

5. 解答はすべて所定の解答欄に記入すること。所定欄以外に何かを記入した解答用紙は採点の対象外となる場合がある。
6. 試験終了の指示が出たら，すぐに解答をやめ，筆記用具を置き解答用紙を裏返しにすること。
7. いかなる場合でも，解答用紙は必ず提出すること。
8. 試験終了後，問題冊子は持ち帰ること。

$\boxed{1}$ 次の各問の解答を解答用紙の所定欄に記入せよ。

(1) 正の整数 a に対して，ある整数 b が存在して $63a-32b=1$ を満たすとする。a はこのような性質を満たす正の整数のうちで最小のものであるとする。このとき ab の値を求めよ。

(2) 3個のさいころを同時に投げたとき，出た目すべての積が4の倍数となる確率を求めよ。

(3) $a_1=a_2=1$，$a_{n+2}=a_n+a_{n+1}\quad(n=1,2,3,\cdots)$ とし，

$$b_n=\sum_{k=1}^{n}a_k\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

とおく。b_1 から b_{2016} までの2016個の整数のうち3の倍数であるものは全部で何個あるか。

(4) $y=f(x)$ は $0\leqq x\leqq 1$ で定義された連続な関数で $f(0)=0$，$f(1)=1$ であり，$0\leqq x_1<x_2\leqq 1$ であるすべての x_1,x_2 に対して $f(x_1)<f(x_2)$ を満たしているとする。$x=g(y)$ を $0\leqq y\leqq 1$ で定義された f の逆関数とする。

$$5\int_0^1 f(x)\,dx=2\int_0^1 g(y)\,dy$$

が成立しているとき $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ の値を求めよ。

$\boxed{2}$ 2つの複素数 $w,z\ (z\neq 0)$ の間に

$$w=z-\frac{7}{4z}$$

という関係がある。ここで $w=x+yi$ (x,y は実数，i は虚数単位) と表すとき，以下の問に答えよ。

(1) 複素数平面上で z が原点Oを中心として半径 $\dfrac{7}{2}$ の円周上を動くとする。このとき w が描く曲線 C を座標平面上の x と y の方程式で表示せよ。

(2) (1) で得られた曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(s,t)$ $(s>0,\ t>0)$ における曲線 C の接線が x 軸と交わる点をQ，y 軸と交わる点をRとする。このとき原点OとQとRとを頂点とする直角三角形 $\triangle\mathrm{OQR}$ を y 軸のまわりに1回転してできる円錐の体積の最小値を求めよ。

3 座標平面上の動点 $\mathrm{P}_t(x,y)$ の座標が，t の関数

$$x = e^{-t}\cos t, \quad y = e^{-t}\sin t$$

で与えられている。また O を原点とする。実数 a, b で $0 < b - a < 2\pi$ であるものに対して，線分 OP_a と，動点 P_t が $t = a$ から $t = b$ まで動くときに描く曲線と，線分 OP_b とによって囲まれる部分の面積を $S(a,b)$ とおく。次の問に答えよ。

(1) $f(t) = S(0,t)$ とする。導関数 $\dfrac{d}{dt}f(t)$ を求めよ。

(2) 自然数 n に対して，$U(n) = S\left(\dfrac{n-1}{2}\pi, \dfrac{n}{2}\pi\right)$ とおく。$U(n)$ を求めよ。

(3) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} U(n)$ の和を求めよ。

4 3 点 $(0,0), (1,0), (0,1)$ を頂点とする三角形を D とする。D の 1 辺を選び，その中点を中心として D を 180° 回転させる。このようにして D から得られる 3 個の三角形からなる集合を S_1 とする。S_1 から一つ三角形を選び，さらにその三角形の 1 辺を選び，その中点を中心としてその三角形を 180° 回転させる。このようにして S_1 から得られる三角形すべてからなる集合を S_2 とする。S_2 は 7 個の三角形からなる集合であり，その中には D も含まれる。一般に，自然数 n に対して S_n まで定義されたとき，S_n から一つ三角形を選び，さらにその三角形の 1 辺を選び，その中点を中心としてその三角形を 180° 回転させる。このようにして S_n から得られる三角形すべてからなる集合を S_{n+1} とする。次の問に答えよ。

(1) S_3 の要素を全て図示せよ。

(2) m を自然数とする。S_{2m} から一つ三角形を選び，その頂点それぞれと原点 $(0,0)$ との距離の最大値を考える。三角形の選び方をすべて考えたときの，この最大値の最大値 d_{2m} を求めよ。

〔以　下　余　白〕