数　学
（問　題）
2015年度

〈2015　H27090015（数学）〉

注意事項

1. 試験開始の指示があるまで，問題冊子および解答用紙には手を触れないこと。
2. 問題は４～６ページに記載されている。試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚損等に気付いた場合は，手を挙げて監督員に知らせること。
3. 解答はすべて，ＨＢの黒鉛筆またはＨＢのシャープペンシルで記入すること。
4. 記述解答用紙記入上の注意
 (1) 記述解答用紙の所定欄（２カ所）に，氏名および受験番号を正確に丁寧に記入すること。
 (2) 所定欄以外に受験番号・氏名を書いてはならない。
 (3) 受験番号の記入にあたっては，次の数字見本にしたがい，読みやすいように，正確に丁寧に記入すること。

数字見本	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

 (4) 受験番号は右詰めで記入し，余白が生じる場合でも受験番号の前に「０」を記入しないこと。

（例）3825番⇒

万	千	百	十	一
	3	8	2	5

5. 解答はすべて所定の解答欄に記入すること。所定欄以外に何かを記入した解答用紙は採点の対象外となる場合がある。
6. 試験終了の指示が出たら，すぐに解答をやめ，筆記用具を置き解答用紙を裏返しにすること。
7. いかなる場合でも，解答用紙は必ず提出すること。
8. 試験終了後，問題冊子は持ち帰ること。

$\boxed{1}$ 次の各問の解答を解答用紙の所定欄に記入せよ。

(1) 整式 $P(x)$ を $(x-1)(x-4)$ で割ると余りは $43x-35$ であり，$(x-2)(x-3)$ で割ると余りは $39x-55$ であるという。このとき，$P(x)$ を

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

で割ったときの余りを求めよ。

(2) 座標平面に4点 $\mathrm{A}(1,1)$，$\mathrm{B}(1,-1)$，$\mathrm{C}(-1,1)$，$\mathrm{D}(-1,-1)$ がある。実数 x が $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲にあるとき，2点 $\mathrm{P}(x,0)$，$\mathrm{Q}(-x,0)$ を考える。このとき，5本の線分の長さの和

$$\mathrm{AP}+\mathrm{BP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{CQ}+\mathrm{DQ}$$

が最小となるような x の値を求めよ。ただし，$x=0$ のときは $\mathrm{PQ}=0$ とする。

(3) 1から10までの自然数からなる集合 $\{1,2,\ldots,10\}$ の中から異なる3つの数を選ぶとする。このとき，選んだ数の和が3で割り切れる確率を求めよ。

(4) 座標平面において楕円 $E : \dfrac{x^2}{a}+y^2=1$ を考える。ただし，a は $a>0$ をみたす定数とする。楕円 E 上の点 $\mathrm{A}(0,1)$ を中心とする円 C が，次の2つの条件をみたしているとする。

(ア) 楕円 E は円 C とその内部に含まれ，E と C は2点 P,Q で接する。

(イ) $\triangle\mathrm{APQ}$ は正三角形である。

このとき，a の値を求めよ。

$\boxed{2}$ 3種類の記号 a, b, c から重複を許して n 個を選び，それらを一列に並べて得られる長さ n の記号列を考える。このような記号列のなかで，a がちょうど偶数個含まれるようなものの総数を $g(n)$ とする。ただし，0個の場合も偶数個とみなす。たとえば，$g(1)=2,\ g(2)=5$ である。

(1) 自然数 $n \geqq 1$ に対して $g(n+1)=g(n)+3^n$ が成り立つことを示せ。

(2) $g(n)$ を求めよ。

(3) 一般に，a を含む m 種類の記号から重複を許して n 個を選び，それらを一列に並べて得られる長さ n の記号列を考える。ただし，$m \geqq 2$ とする。このような記号列のなかで，a がちょうど奇数個含まれるようなものの総数を $k_m(n)$ とする。自然数 $n \geqq 1$ に対して，$k_m(n)$ を求めよ。

$\boxed{3}$ 平面上に長さ1のベクトル $\vec{n}$ がある。また，a は $a>1$ をみたす定数とする。平面上のベクトル $\vec{x}$ に対して，ベクトル $\vec{y}$ を

$$\vec{y}=\vec{x}-a(\vec{x}\cdot\vec{n})\,\vec{n}$$

により定める。ただし，$\vec{x}\cdot\vec{n}$ はベクトルの内積を意味し，$a(\vec{x}\cdot\vec{n})$ はその a 倍の実数を表している。

(1) すべてのベクトル $\vec{x}$ に対して $|\vec{x}|=|\vec{y}|$ が成り立つための必要十分条件は，$a=2$ であることを示せ。

(2) $\vec{x} \neq \vec{0}$ とする。$\vec{x}$ と $\vec{n}$ のなす角を θ とし，$\vec{y}$ と $\vec{n}$ のなす角を ϕ とする。このとき，a と $\cos\theta$ を用いて $\cos\phi$ を表せ。

$\boxed{4}$ 座標平面の第1象限に曲線 $C_0 : y = \dfrac{1}{x} + x\ (x > 0)$ と曲線 $C : y = \dfrac{1}{x}\ (x > 0)$ がある。C_0 上の点 $(a, \dfrac{1}{a} + a)$ における C_0 の接線を ℓ とする。このとき，ℓ は曲線 C と2点で交わっているとする。

(1) このように，接線 ℓ と曲線 C が2点で交わる a の範囲を求めよ。

(2) 接線 ℓ と曲線 C とで囲まれた部分の面積を求めよ。

(3) 上の (2) で求めた面積を $S(a)$ とするとき，

$$\frac{a^3}{1-a^2} < S(a) < \frac{2a}{1-a^2}$$

が成り立つことを示せ。

〔以　下　余　白〕