数　　学

問　題

2014年度

〈H26080017〉

注 意 事 項

1. この試験では、この問題冊子のほかに、解答用紙３種類（その１、その２、その３）を配布します。
2. 試験開始の指示があるまで、問題冊子および解答用紙には手を触れないでください。
3. 問題は４～５ページに記載されています。試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚損等に気付いた場合は、手を挙げて監督員に知らせてください。
4. 解答はすべて、ＨＢの黒鉛筆またはＨＢのシャープペンシルで記入してください。
5. 記述解答用紙記入上の注意
   (1) 記述解答用紙の所定欄（２カ所）に、氏名および受験番号を正確に丁寧に記入してください。
   (2) 所定欄以外に受験番号・氏名を書かないでください。
   (3) 受験番号の記入にあたっては、次の数字見本にしたがい、読みやすいように、正確に丁寧に記入してください。

数字見本	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

   (4) 受験番号は右詰めで記入し、余白が生じる場合でも受験番号の前に「0」を記入しないでください。

	万	千	百	十	一
(例)　3825番⇒		3	8	2	5

6. 解答はすべて所定の解答欄に記入してください。所定欄以外に何かを記入した解答用紙は採点の対象外となる場合があります。
7. 下書きは問題冊子の余白を使用してください。
8. 試験終了の指示が出たら、すぐに解答をやめ、筆記用具を置き解答用紙を裏返しにしてください。
9. 問題冊子は持ち帰ってください。
10. いかなる場合でも、解答用紙は必ず提出してください。

[I]　複素数 $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ に対して，

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha^{k-1}, \qquad T_n = \sum_{k=1}^{n} k\alpha^{k-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

とおく。ただし，$\alpha^0 = 1$ とする。次の問に答えよ。

(1) S_{3m} $(m = 1, 2, \ldots)$ を求めよ。

(2) T_{3m} $(m = 1, 2, \ldots)$ を求めよ。

(3) T_{2014} を求めよ。

[II]　3次関数 $f(x) = x^3 - ax - b$ について，次の問に答えよ。

(1) $a > 0$ であるとき，$f(x)$ の極大値と極小値を求めよ。

(2) 次の (i), (ii), (iii) を示せ。

(i) $27b^2 - 4a^3 > 0$ のとき，3次方程式 $f(x) = 0$ はただ1つの実数解をもつ。

(ii) $27b^2 - 4a^3 = 0$ かつ $a > 0$ のとき，3次方程式 $f(x) = 0$ は異なる2つの実数解をもつ。

(iii) $27b^2 - 4a^3 < 0$ のとき，3次方程式 $f(x) = 0$ は異なる3つの実数解をもつ。

[III]　立方体の面を3色を用いて2つずつ同じ色に塗る。次の問に答えよ。

(1) 向かい合う2面が，どの組についても同じ色で塗られる確率を求めよ。

(2) 向かい合う2面が，どの組についても同じ色にならない確率を求めよ。

(3) 向かい合う2面の組のうち，2面の色が同じになる組の個数の期待値を求めよ。

[Ⅳ]　関数 $f(x)$ を次の積分で定義する。

$$f(x) = \int_x^{x+\log 2} |e^{2t} - e^t - 2|dt$$

次の問に答えよ。

(1) $g(t) = e^{2t} - e^t - 2$ のグラフを描け。

(2) $f(x)$ を求めよ。

(3) $f(x)$ が極値をとる x を求めよ。

[Ⅴ]　O を原点とする座標平面上に

放物線 $C_1 : y = x^2$,　円 $C_2 : x^2 + (y-a)^2 = 1$　$(a \geqq 0)$

がある。C_2 の点 $(0, a+1)$ における接線と C_1 が 2 点 A, B で交わり，△OAB が C_2 に外接しているとする。次の問に答えよ。

(1) a を求めよ。

(2) 点 (s,t) を $(-1,a)$, $(1,a)$, $(0,a-1)$ と異なる C_2 上の点とする。そして点 (s,t) における C_2 の接線と C_1 との 2 つの交点を $\mathrm{P}(\alpha,\alpha^2)$, $\mathrm{Q}(\beta,\beta^2)$ とする。このとき，$(\alpha-\beta)^2-\alpha^2\beta^2$ は s,t によらない定数であることを示せ。

(3) (2) において，点 $\mathrm{P}(\alpha,\alpha^2)$ から C_2 への 2 つの接線が再び C_1 と交わる点を $\mathrm{Q}(\beta,\beta^2)$, $\mathrm{R}(\gamma,\gamma^2)$ とする。$\beta+\gamma$ および $\beta\gamma$ を α を用いて表せ。

(4) (3) の 2 点 Q, R に対し, 直線 QR は C_2 と接することを示せ。

[以　下　余　白]