数　　学

(問　題)

2014年度

〈2014　H26080015（数学）〉

注　意　事　項

1. 試験開始の指示があるまで，問題冊子および解答用紙には手を触れないこと。
2. 問題は4～5ページに記載されている。試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚損等に気付いた場合は，手を挙げて監督員に知らせること。
3. 解答はすべて，ＨＢの黒鉛筆またはＨＢのシャープペンシルで記入すること。
4. 記述解答用紙記入上の注意
   (1) 記述解答用紙の所定欄（2カ所）に，氏名および受験番号を正確に丁寧に記入すること。
   (2) 所定欄以外に受験番号・氏名を書いてはならない。
   (3) 受験番号の記入にあたっては，次の数字見本にしたがい，読みやすいように，正確に丁寧に記入すること。

数字見本	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

   (4) 受験番号は右詰めで記入し，余白が生じる場合でも受験番号の前に「0」を記入しないこと。

(例)　3825番⇒

万	千	百	十	一
	3	8	2	5

5. 解答はすべて所定の解答欄に記入すること。所定欄以外に何かを記入した解答用紙は採点の対象外となる場合がある。
6. 試験終了の指示が出たら，すぐに解答をやめ，筆記用具を置き解答用紙を裏返しにすること。
7. いかなる場合でも，解答用紙は必ず提出すること。
8. 試験終了後，問題冊子は持ち帰ること。

$\boxed{1}$ 次の空欄 $\boxed{①}$ から $\boxed{⑥}$ にあてはまる数または数式を解答用紙の所定欄に記入せよ。

(1) 3次曲線 $y = x^3 - 6x^2 + 11x - 4$ と直線 $y = ax$ が第1象限の相異なる3点で交わるような定数 a の範囲は $\boxed{①} < a < \boxed{②}$ である。

(2) 硬貨を投げ，3回つづけて表が出たら終了する。n 回以下で終了する場合の数を f_n とする。$f_{10} = \boxed{③}$ である。

(3) 不等式 $\dfrac{a}{19} < \log_{10} 7 < \dfrac{b}{13}$ を満たす最大の整数 a と最小の整数 b は $a = \boxed{④}$，$b = \boxed{⑤}$ である。必要に応じて次の事実を用いてもよい。

$7^1 = 7$	$7^2 = 49$	$7^3 = 343$
$7^4 = 2401$	$7^5 = 16807$	$7^6 = 117649$
$7^7 = 823543$	$7^8 = 5764801$	$7^9 = 40353607$
$7^{10} = 282475249$	$7^{11} = 1977326743$	$7^{12} = 13841287201$
$7^{13} = 96889010407$	$7^{14} = 678223072849$	

(4) 四面体ABCDは，4つの面のどれも3辺の長さが $7, 8, 9$ の三角形である。この四面体ABCDの体積は $\boxed{⑥}$ である。

$\boxed{2}$ $\sin\theta = \dfrac{4}{5}$ を満たす $\theta \left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ に対し，$a_n = 5^n \sin n\theta$ とおく $(n = 1, 2, \cdots)$。次の問いに答えよ。

(1) 数列 $\{a_n\}$ は，ある整数 A, B を用いて

$$a_{n+2} = Aa_{n+1} + Ba_n$$

と表される。このとき，A, B の値を求めよ。

(2) a_n は5で割ると4余る整数であることを証明せよ。

(3) θ は円周率 π の有理数倍ではないことを証明せよ。

$\boxed{3}$ a は 1 より大きい実数とする。

(1) 次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(a^{\frac{k+1}{n}}-a^{\frac{k}{n}}\right)\frac{1}{a^{\frac{k+1}{n}}} < \int_1^a \frac{dx}{x} < \sum_{k=0}^{n-1}\left(a^{\frac{k+1}{n}}-a^{\frac{k}{n}}\right)\frac{1}{a^{\frac{k}{n}}}$$

(2) 次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left(a^{\frac{k+1}{n}}-a^{\frac{k}{n}}\right)\frac{1}{a^{\frac{k+1}{n}}} = \int_1^a \frac{dx}{x} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left(a^{\frac{k+1}{n}}-a^{\frac{k}{n}}\right)\frac{1}{a^{\frac{k}{n}}}$$

$\boxed{4}$ 2 個以上の正の整数を要素とする有限集合を A とする。

A のどの2数も一方が他方を割り切るとき A は良い集合であるといい，A のどの2数も互いに他を割り切らないとき A は悪い集合であるという。

また，A の良い部分集合の要素の個数の最大値，すなわち，

$$\max\{\, n(B) \mid B \subset A,\ n(B) \geqq 2 \text{ かつ } B \text{ は良い集合} \,\}$$

を A の最良数と定義し，A の悪い部分集合の要素の個数の最大値，すなわち，

$$\max\{\, n(B) \mid B \subset A,\ n(B) \geqq 2 \text{ かつ } B \text{ は悪い集合} \,\}$$

を A の最悪数と定義する。

たとえば，$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 14, 15, 77, 154, 225, 231, 308\}$ のとき，A の良い部分集合は $\{7, 77, 231\}$, $\{7, 14, 154, 308\}$, $\{11, 77, 154, 308\}$ などであり，A の最良数は 4 である。また，A の悪い部分集合は $\{231, 308\}$, $\{14, 15, 77\}$, $\{2, 7, 11, 15\}$, $\{2, 3, 5, 7, 11\}$ などであり，A の最悪数は 5 である。

k を 2 以上の整数とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $n(A) = k^2$ で，かつ最良数も最悪数も k である集合 A が存在することを証明せよ。

(2) $n(A) \geqq k^2 + 1$ ならば，A の最良数または A の最悪数のどちらかは $k+1$ 以上であることを証明せよ。

(3) 要素数が 2014 で，かつ最良数と最悪数が等しいような集合，すなわち，

$$n(A) = 2014 \text{ かつ } (A \text{ の最良数}) = (A \text{ の最悪数})$$

を満たす集合 A を考える。このような集合たちの中で最良数が最小となる集合の例を挙げよ。

〔以 下 余 白〕