数　　学

(問　題)

2014年度

〈2014　H26080111〉

注 意 事 項

1. 試験開始の指示があるまで，問題冊子および解答用紙には手を触れないこと。
2. 問題は２，４，６ページに記載されている。その他のページは計算用として使ってよい。試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚損等に気付いた場合は，手を挙げて監督員に知らせること。
3. 解答はすべて，ＨＢの黒鉛筆またはＨＢのシャープペンシルで記入すること。コンパス，定規は使用してもよい。
4. 記述解答用紙記入上の注意

(1) 記述解答用紙の所定欄（２カ所）に，氏名および受験番号を正確に丁寧に記入すること。

(2) 所定欄以外に受験番号・氏名を書いてはならない。

(3) 受験番号の記入にあたっては，次の数字見本にしたがい，読みやすいように，正確に丁寧に記入すること。

数字見本	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

(4) 受験番号は右詰めで記入し，余白が生じる場合でも受験番号の前に「０」を記入しないこと。

	万	千	百	十	一
(例)　3825番⇒		3	8	2	5

5. 解答はすべて所定の解答欄に記入すること。所定欄以外に何かを記入した解答用紙は採点の対象外となる場合がある。
6. 試験終了の指示が出たら，すぐに解答をやめ，筆記用具を置き解答用紙を裏返しにすること。
7. いかなる場合でも，解答用紙は必ず提出すること。

問1　次の空欄にあてはまる数または式を解答欄に記入せよ。

$\{a_n\}$ を，初項1，公差 d の等差数列とし，

$$P_n = r^{a_1} \cdot r^{a_2} \cdot \cdots \cdot r^{a_n}$$

と定義する。ただし，r は $r>1$ を満たす定数である。P_n が $P_3 = P_9$ を満たしているならば，公差 $d =$ $\boxed{(ア)}$ である。このとき，P_n は，$n =$ $\boxed{(イ)}$ のとき，最大値 $\boxed{(ウ)}$ をとる。また，$P_n < 1$ となる最小の n は，$n =$ $\boxed{(エ)}$ である。

問2　x-y 平面の双曲線 $y = \dfrac{1}{x}$ 上の相異なる3点を，A，B，Cとし，その x 座標を，それぞれ，a，b，c とする。このとき，次の各問に答えよ。

（1）　空欄にあてはまる数式を求め，答のみ解答欄に記入せよ。

直線ABに垂直な直線の傾きは $\boxed{(ア)}$ である。△ABCの垂心をHとするとき，Hの x，y 座標を a，b，c を用いて表すと，$x =$ $\boxed{(イ)}$，$y =$ $\boxed{(ウ)}$ である。よって，A，B，Cが双曲線上を動くとき，Hの軌跡は x，y の関係式 $\boxed{(エ)}$ で表され，Hはこの関係式で表される図形上のすべての点を動く。

（2）　△ABCの外心をP$(x,\ y)$ とする。

（i）　Pの座標 x，y を，a，b，c を用いて表せ。

（ii）　a，b，c が，$a+b=0$，$c=1$ を満たすとき，P$(x,\ y)$ の軌跡を求め，その軌跡を解答欄の x-y 平面に図示せよ。

問 3　次の各問に答えよ。ただし，（2）は答のみ解答欄に記入せよ。

（1）　放物線 $y = ax^2 + bx$（$a > 0$）と直線 $y = mx$ が異なる2点で交わるとする。原点と異なる交点の x 座標を α とするとき，放物線と直線で囲まれた図形の面積は $S = \dfrac{1}{6}a|\alpha|^3$ であることを示せ。

（2）　2つの放物線 $C_1 : y = a_1x^2 + b_1x$，$C_2 : y = a_2x^2 + b_2x$ が異なる2点で交わるとする。ただし，$a_1a_2 < 0$ とする。

（i）　放物線 C_1，C_2 の2つの交点を通る直線を $l : y = mx$ とするとき，m を求めよ。

（ii）　放物線 C_i と直線 l で囲まれた図形の面積を S_i（$i = 1, 2$）とするとき，$\dfrac{S_2}{S_1}$ を求めよ。

（iii）　$m = 1$ かつ $S_1 = S_2$ のとき，a_i，b_i（$i = 1, 2$）が満たす条件を求めよ。

問4　x，y を自然数，p を3以上の素数とするとき，次の各問に答えよ。ただし，(**1**)，(**3**) は答のみ解答欄に記入せよ。

(**1**)　$x^2-y^2=p$ が成り立つとき，x，y を p で表せ。

(**2**)　$x^3-y^3=p$ が成り立つとき，p を6で割った余りが1となることを証明せよ。

(**3**)　$x^3-y^3=p$ が自然数の解の組 $(x,\ y)$ をもつような p を，小さい数から順に p_1，p_2，p_3，……とするとき，p_5 の値を求めよ。

〔以　下　余　白〕