数　　　学
問　題
2013年度

〈H25070017〉

注　意　事　項

1. この試験では，この問題冊子のほかに，解答用紙3種類（その1，その2，その3）を配付します。
2. 問題冊子および解答用紙は，試験開始の合図があるまで開かないでください。
3. 問題は4～5ページに記載されています。試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁，乱丁および解答用紙の汚れに気付いた場合は，手を挙げて監督員に知らせてください。
4. すべての**解答用紙**の所定の欄（**各2か所**）に，**氏名**および受験票に記載されている**受験番号**を，**正確に**記入してください。受験番号は，右詰めで記入し，番号欄に余白が生じる場合でも，番号の前に「0」を記入しないでください。

（例）　3825番 ⇨

万	千	百	十	一
	3	8	2	5

※数字は読みやすいように，はっきり記入してください。読みにくい数字は採点処理に支障をきたすことがあるので，注意してください。

数字見本	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

5. 解答はすべて解答用紙の所定欄に，黒鉛筆（ＨＢ）またはシャープペンシル（ＨＢ）で記入し，所定欄外には何も記入しないでください。
6. 下書きは問題冊子の余白を使用してください。
7. 問題冊子は持ち帰ってください。
8. **解答用紙は必ず提出してください。**

このページは下書きに使用してよい。

このページは下書きに使用してよい。

[I]　放物線 $C : y^2 = 4px\ (p > 0)$ の焦点 $\mathrm{F}(p,\, 0)$ を通る 2 直線 ℓ_1, ℓ_2 は互いに直交し，C と ℓ_1 は 2 点 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$ で，C と ℓ_2 は 2 点 $\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2$ で交わるとする。次の問に答えよ。

(1) ℓ_1 の方程式を $x = ay+p$ と置き，$\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$ の座標をそれぞれ $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ とする。$y_1 + y_2$, $y_1 y_2$ を a と p で表せ。

(2) $\dfrac{1}{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2} + \dfrac{1}{\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2}$ は ℓ_1, ℓ_2 のとり方によらず一定であることを示せ。

[II]　複素数 $z = 1 + 2\sqrt{6}\, i$ と自然数 $n = 1, 2, 3, \cdots$ について，複素数 z^n を実数 a_n, b_n を用いて

$$z^n = a_n + b_n i$$

と表す。次の問に答えよ。

(1) ${a_n}^2 + {b_n}^2 = 5^{2n}\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ であることを示せ。

(2) すべての n について $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$ が成り立つ定数 p, q を求めよ。

(3) どんな n についても a_n は 5 の整数倍でないことを示せ。

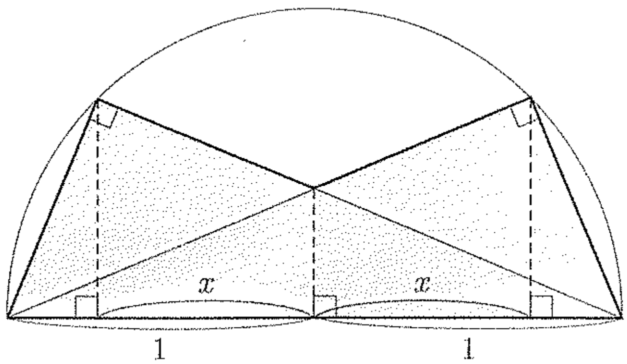
(4) $z^n\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ は実数でないことを示せ。

[III]　$f(x) = \dfrac{1}{2}e^{2x} + 2e^x + x$ とする。次の問に答えよ。

(1) 実数 t に対して $g(x) = tx - f(x)$ とおく。x が実数全体を動くとき，$g(x)$ が最大値をもつような t の範囲を求めよ。また t がその範囲にあるとき，$g(x)$ の最大値とそのときの x の値を求めよ。

(2) (1) で求めた最大値を $m(t)$ とする。a を定数とし，t の関数 $h(t) = at - m(t)$ を考える。t が (1) で求めた範囲を動くとき，$h(t)$ の最大値を求めよ。

[IV]　半径 1 の半円を底面とし，高さが 1 の半円柱に含まれる立体 R がある。その高さ x $(0 \leqq x \leqq 1)$ での断面が，次の図のように 2 つの直角三角形を合わせた形になっている。次の問に答えよ。



(1) 高さ x での R の断面積 $S(x)$ を求めよ。

(2) R の体積を求めよ。必要ならば，積分する際に $x = \sin t$ と置き換えよ。

[V]　空間内に平面 P がある。空間内の図形 A に対し，A の各点から P に下ろした垂線と P との交点の全体を，A の P への正射影とよぶ。次の問に答えよ。

(1) 平面 Q が平面 P と角 θ $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ で交わっているとする。すなわち，P と Q の交線に垂直な平面で P, Q を切ってできる 2 直線のなす角が θ であるとする。Q 上の長さ 1 の線分の P への正射影の長さの最大値と最小値を求めよ。

(2) (1) の Q を考える。Q 上の 1 辺の長さが 1 である正三角形の P への正射影の面積を求めよ。

(3) 1 辺の長さが 1 である正四面体 T の P への正射影 T' はどんな形か。また，T' の面積の最大値を求めよ。

[以　下　余　白]

このページは下書きに使用してよい。

このページは下書きに使用してよい。