数　　学

問　題

2012年度

〈H24060017〉

注　意　事　項

1. この試験では，この問題冊子のほかに，解答用紙3種類（その1，その2，その3）を配付します。
2. 問題冊子および解答用紙は，試験開始の合図があるまで開かないでください。
3. 問題は4～5ページに記載されています。試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁，乱丁および解答用紙の汚れに気付いた場合は，手を挙げて監督員に知らせてください。
4. すべての**解答用紙**の所定の欄（**各2か所**）に，**氏名**および受験票に記載されている**受験番号**を，**正確に**記入してください。受験番号は，右詰めで記入し，番号欄に余白が生じる場合でも，番号の前に「0」を記入しないでください。

（例）　3825番 ⇨

万	千	百	十	一
	3	8	2	5

※数字は読みやすいように，はっきり記入すること。

読みにくい数字は採点処理に支障をきたすことがあるので，注意すること。

数字見本	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

5. 解答はすべて解答用紙の所定欄に，黒鉛筆（HB）またはシャープペンシル（HB）で記入し，所定欄外には何も記入しないでください。
6. 下書きは問題冊子の余白を使用してください。
7. 問題冊子は持ち帰ってください。
8. 解答用紙は必ず提出してください。

[Ⅰ]　以下の問に答えよ。

(1) 複素数 α, β に対して $\alpha\beta = 0$ ならば，$\alpha = 0$ または $\beta = 0$ であることを示せ。

(2) 複素数 α に対して α^2 が正の実数ならば，α は実数であることを示せ。

(3) 複素数 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n+1}$ (n は自然数) に対して，$\alpha_1\alpha_2, \ldots, \alpha_k\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_{2n}\alpha_{2n+1}$ および $\alpha_{2n+1}\alpha_1$ がすべて正の実数であるとする。このとき，$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n+1}$ はすべて実数であることを示せ。

[Ⅱ]　初項を $a_0 \geqq 0$ とし，以下の漸化式で定まる数列 $\{a_n\}_{n=0,1,\ldots}$ を考える。

$$a_{n+1} = a_n - [\sqrt{a_n}] \qquad (n \geqq 0)$$

ただし $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。つぎの問に答えよ。

(1) $a_0 = 24$ とする。このとき，$a_n = 0$ となる最小の n を求めよ。

(2) m を 2 以上の整数とし，$a_0 = m^2$ とする。このとき，$1 \leqq j \leqq m$ をみたす j に対して a_{2j-1}, a_{2j} を j と m で表せ。

(3) m を 2 以上の整数，p を $1 \leqq p \leqq m-1$ をみたす整数とし，$a_0 = m^2 - p$ とする。このとき，$a_k = (m-p)^2$ となる k を求めよ。さらに，$a_n = 0$ となる最小の n を求めよ。

[Ⅲ]　表が出る確率が a $\left(0 < a < \dfrac{1}{2}\right)$，裏が出る確率が $1-a$ のコインを 1 枚投げる試行を n 回行う。ただし $n \geqq 2$ とする。この n 回の試行の結果，表が 2 回以上出る事象を A_n で表す。また 1 回目から n 回目の試行が終わるまでに，「裏 $\rightarrow$ 表」の順で出ない事象を B_n で表す。つぎの問に答えよ。

(1) 確率 $P(A_n)$, $P(B_n)$ を求めよ。

(2) 確率 $P(A_n \cap B_n)$ を求めよ。

(3) 極限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(A_n)P(B_n)}{P(A_n \cap B_n)}$$

を求めよ。ただし，$0 < r < 1$ をみたす r に対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} nr^n = 0$ となることを証明なしに用いてよい。

[IV]　関数

$$f(x) = \log\left(1+\sqrt{1-x^2}\right) - \sqrt{1-x^2} - \log x \quad (0 < x < 1)$$

について，つぎの問に答えよ。

(1) $f'(x)$ を求めよ。

(2) $y = f(x)$ のグラフの概形を描け。

(3) 曲線 $y = f(x)$ 上を動く点を P とする。点 Q は，曲線 $y = f(x)$ の P における接線上にあり，P との距離が 1 で，その x 座標が P の x 座標より小さいものとする。Q の軌跡を求めよ。

[V]　xy 平面上に 2 点 A$(-1, 0)$, B$(1, 0)$ をとる。$\dfrac{\pi}{4} \leqq \angle\mathrm{APB} \leqq \pi$ をみたす平面上の点 P の全体と点 A, B からなる図形を F とする。つぎの問に答えよ。

(1) F を図示せよ。

(2) F を x 軸のまわりに 1 回転して得られる立体の体積を求めよ。

[以　下　余　白]