数　　学

(問　題)

2012年度

〈2012　H24063620〉

注　意　事　項

1. 問題冊子は，試験開始の指示があるまで開かないこと．
2. 問題は4～9ページに記載されている．試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁およびマーク解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督員に知らせること．
3. 解答はすべてマーク解答用紙の所定欄にＨＢの黒鉛筆またはＨＢのシャープペンシルでマークすること．
4. 氏名は，試験開始後，マーク解答用紙の所定欄に，正しくていねいに記入すること．
5. 問1から問6までの $\boxed{ア}$, $\boxed{イ}$, $\boxed{ウ}$, …にはそれぞれ，−49，−48，…，−2，−1，0，1，2，…，48，49のいずれかの数が当てはまる．次の例にならって，マーク解答用紙のア，イ，ウ，…で示された欄にマークして答えること．

   例．アに3，イに−5，ウに30，エに−24，オに0と答えたいとき．

		十の位				一の位									
	−	1	2	3	4	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ア	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○	○	○
イ	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○
ウ	○	○	○	●	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○
エ	●	○	●	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○	○
オ	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○

6. マーク欄ははっきり記入すること．また，訂正する場合は，消しゴムでていねいに，消し残しがないようによく消すこと（砂消しゴムは使用しないこと）．

マークする時	●良い　◎悪い　◐悪い
マークを消す時	○良い　◎悪い　◐悪い

7. いかなる場合でも，マーク解答用紙は必ず提出すること．
8. 試験終了後，問題冊子は持ち帰ること．

問 1.

p, q を 1 でない自然数とする．このとき，

$$2(1 - \log_2 10) \log_5 p + \log_2 \frac{2012}{q} = 0$$

を満たす p の値は $\boxed{\text{ア}}$ である．

問2.

赤球と白球をあわせて 12 個の球が入っている袋がある．この袋から同時に 2 個の玉を取り出すとき， それらが同じ色である確率は $\dfrac{31}{66}$ である．袋には白球5よりも赤球7が多く入っている．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 袋に赤球は $\boxed{\text{イ}}$ 個入っている．

(2) この袋から同時に 3 個の球を取り出すとき，赤球が少なくとも 1 個含まれる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である．ただし，

$\boxed{\text{エ}}$ はできるだけ小さい自然数で答えることとする．

問3.

四面体 OABC において，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{OB}$ はいずれも $\overrightarrow{OA}$ に直交し，$\overrightarrow{AC}$ と $\overrightarrow{OB}$ のなす角は 60 度であり，

$$AC = OB = 2, \quad OA = 3$$

である．このとき，三角形 ABC の面積は $\boxed{オ}\sqrt{\boxed{カ}}$ であり，四面体 OABC の体積は $\sqrt{\boxed{キ}}$ である．

ただし，$\boxed{カ}$ はできるだけ小さい自然数で答えることとする．

問 4.

1 と 2 を用いて n 桁の自然数を作る．このような n 桁の自然数のうち，3 の倍数となる数の個数を a_n，そうでない数の個数を b_n とする．

$$a_1 = \boxed{\text{ク}},\quad b_1 = \boxed{\text{ケ}}$$

である．また，

$$a_n + b_n = \boxed{\text{コ}}^n$$

であり，さらに，実数 p，q，r，s を用いて，

$$\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + qb_n \\ b_{n+1} = ra_n + sb_n \end{cases}$$

と表すことができる．

$$p = \boxed{\text{サ}},\quad q = \boxed{\text{シ}}$$

である．ここで，$c_n = \dfrac{a_n}{2^n}$ とおくと，

$$c_{n+1} = \frac{\boxed{\text{ス}}}{2}c_n + \frac{\boxed{\text{セ}}}{2},\quad c_1 = \boxed{\text{ソ}}$$

となる．よって，

$$a_n = \frac{\boxed{\text{タ}}}{3}\left(\boxed{\text{チ}}\right)^n + \frac{\boxed{\text{ツ}}^n}{3}$$

である．

問 5.

k を実数とする．3 次関数

$$f(x) = -x^3 + kx^2 + kx + 1$$

が $x = \alpha$ で極小値をとり，$x = \beta$ で極大値をとる．3 点 $\mathrm{A}\,(\alpha, f(\alpha))$，$\mathrm{B}\,(\beta, f(\beta))$，$\mathrm{C}\,(\beta, f(\alpha))$ が $\mathrm{AC} = \mathrm{BC}$ を満たすとき，

$$\alpha + \beta = \frac{\boxed{テ}}{3}k, \quad \alpha\beta = \frac{\boxed{ト}}{3}k$$

である．したがって，

$$k = \frac{\boxed{ナ} \pm \boxed{ニ}\sqrt{\boxed{ヌ}}}{2}$$

となる．ただし，$\boxed{ニ}$ は自然数，$\boxed{ヌ}$ はできるだけ小さい自然数で答えることとする．

問 6.

$0 \leqq x \leqq 1$ において，連立不等式

$$\begin{cases} 1-2x \leqq f(x) \\ x \leqq f(x) \\ f(x) \leqq 1 \end{cases}$$

を満たす 2 次関数 $f(x)$ で，定積分 $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ の値を最小にする関数は，

$$f(x) = \boxed{\text{ネ}}x^2 + \boxed{\text{ノ}}x + \boxed{\text{ハ}}$$

であり，その最小値は $\dfrac{\boxed{\text{ヒ}}}{\boxed{\text{フ}}}$ となる．ただし，$\boxed{\text{フ}}$ はできるだけ小さい自然数で答えることとする．

〔以　下　余　白〕