数　　　学

(問　題)

2012年度

〈2012　H24060015（数学）〉

注　意　事　項

1. 問題冊子および記述解答用紙は，試験開始の指示があるまで開かないこと。
2. 問題は４～６ページに記載されている。試験中に問題冊子の印刷の乱れ，解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督員に知らせること。
3. 解答はすべて解答用紙の所定欄にＨＢの黒鉛筆またはＨＢのシャープペンシルで記入すること。欄外の余白には何も記入しないこと。
4. 試験が開始されたらただちに，解答用紙の所定欄（２か所）に，受験番号および氏名を正確に丁寧に記入すること。
5. いかなる場合でも，解答用紙は必ず提出すること。
6. 試験終了後，問題冊子は持ち帰ること。

$\boxed{1}$ 次の小問の解答を解答用紙の所定欄に記入せよ。

(1) 実数 a, b が $0 \leqq a \leqq \pi$, $a < b$ をみたすとき,

$$I(a,b) = \int_a^b e^{-x} \sin x \, dx$$

とおく。ただし，e は自然対数の底とする。

$$\lim_{b \to \infty} I(a,b) = 0$$

が成立するように a を定めよ。

(2) 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は $ad - bc = 2$ および $a + d = 3$ をみたし，かつ，ある行列

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

に対して $AB = BA$ をみたしている。ただし $\alpha \neq \beta$ とする。このような行列 A をすべて求めよ。

(3) c を正の実数として，漸化式

$$a_n = \frac{{a_{n-1}}^2}{3^n} \quad (n \geqq 1), \qquad a_0 = c$$

で定義される数列 $\{a_n\}$ を考える。このとき $\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$ となるような c の範囲を求めよ。

(4) 実数 t が $1 \leqq t \leqq 2$ の範囲で動くとき，xy 平面の直線

$$y = (3t^2 - 4)x - 2t^3$$

が通る範囲を H とする。H の内，直線 $x = 1$ と $x = \frac{20}{9}$ ではさまれる部分の面積を求めよ。

$\boxed{2}$ 空間に点 O と三角錐 ABCD があり，

$$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{OC} = 1, \quad \mathrm{OD} = \sqrt{5},$$
$$\angle\mathrm{AOB} = \angle\mathrm{BOC} = \angle\mathrm{COA},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}} = \overrightarrow{0}$$

をみたしている。三角錐 ABCD に内接する球の半径を求めよ。

$\boxed{3}$ 実数係数の x の多項式で表された関数 $f(x)$ は，導関数 $f'(x)$ がすべての実数 x に対して $f'(x) > 0$ をみたし，かつ，$f'(x)$ は極大値をもつとする。実数 s に対して，点 $(s, f(s))$ における曲線 $y = f(x)$ の接線と x 軸との交点の x 座標を s の関数として $g(s)$ と表す。

(1) 導関数 $g'(s)$ を求めよ。

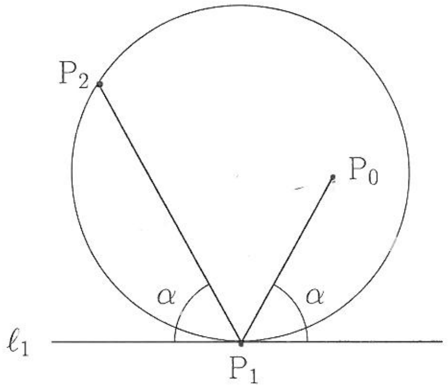
(2) 関数 $g(s)$ は極大値と極小値をもつことを示せ。

4 円 C とその内部の点 P_0 が与えられている。初め P_0 にある動点が，円周上の点 P_1 まで線分 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1$ 上を動き，P_1 からは，P_1 における円 C の接線 ℓ_1 と線分 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1$ のなす角が ℓ_1 と線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ のなす角に等しくなるように向きを変えて，円周上の点 P_2 まで線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ 上を動く（図例 1）。以下，自然数 n について，円周上の点 P_n に至ったあとは，P_n における円 C の接線 ℓ_n と線分 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n$ のなす角が ℓ_n と線分 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$ のなす角に等しくなるように向きを変え，円周上の点 P_{n+1} まで線分 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$ 上を動き，この動きをくり返す（図例 2）。線分 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1$ と接線 ℓ_1 のなす角を $\alpha\ (0 \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2})$ とする。

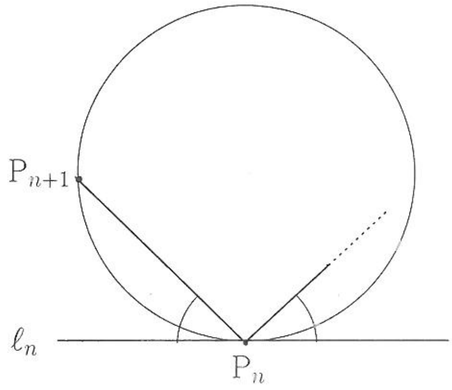
(1) $\mathrm{P}_m = \mathrm{P}_1$ となる 3 以上の自然数 m が存在するような角 α をすべて決定せよ。

(2) 点 P_1 の位置によって角 α は変化し得る。角 α が最大となる P_1 の位置，および最小となる P_1 の位置を求めよ。

(3) $\mathrm{P}_4 = \mathrm{P}_1$ となる点 P_1 がとれるような点 P_0 の存在範囲を求めよ。



図例 1



図例 2

〔以　下　余　白〕