

数 学

問 題

2011年度

〈 H23050017 〉

注 意 事 項

1. この試験では、この問題冊子のほかに、解答用紙3種類（その1，その2，その3）を配付します。
2. 問題冊子および解答用紙は、試験開始の合図があるまで開かないでください。
3. 問題は4～5ページに記載されています。試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁，乱丁および解答用紙の汚れに気付いた場合は，手を挙げて監督員に知らせてください。
4. すべての解答用紙の所定欄（各2か所）に受験番号および氏名を記入してください。
5. 解答はすべて解答用紙の所定欄に，黒鉛筆（HB）またはシャープペンシル（HB）で記入してください。
6. 下書きは問題冊子の余白を使用してください。
7. 問題冊子は持ち帰ってください。
8. 解答用紙は必ず提出してください。

このページは下書きに使用してよい。

このページは下書きに使用してよい。

[I] xy -平面上の放物線 $y = x^2$ を C とする。以下の問に答えよ。

- (1) C 上の点 (a, a^2) における C の法線の方程式を求めよ。
- (2) 点 $(1, 2)$ を通る C の法線の数をもとめよ。
- (3) 点 $(t, t + \frac{1}{2})$ を通る C の法線の数 2 となるための t に対する条件を求めよ。

[II] xy -平面上の円 $C: x^2 + y^2 = 1$ の内側を半径 $\frac{1}{2}$ の円 D が C に接しながらすべらずに転がる。時刻 t において D は点 $(\cos t, \sin t)$ で C に接しているとす。 D の周上の点 P の軌跡について考える。ある時刻 t_0 において点 P が $(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})$ にあり、 D の中心が第2象限にあるとする。以下の問に答えよ。

- (1) 時刻 t_0 における D の中心の座標を求めよ。
- (2) 第1象限において、点 P が C 上にあるときの P の座標を求めよ。
- (3) 点 P の軌跡を xy -平面上に図示せよ。

[III] $f(x) = \frac{\log x}{x}$ とする。以下の問に答えよ。

- (1) $y = f(x)$ のグラフの概形を次の点に注意して描け: $f(x)$ の増減, グラフの凹凸, $x \rightarrow +0, x \rightarrow \infty$ のときの $f(x)$ の挙動。
- (2) n を自然数とする。 $k = 1, 2, \dots, n$ に対して x が $e^{\frac{k-1}{n}} \leq x \leq e^{\frac{k}{n}}$ を動くときの $f(x)$ の最大値を M_k , 最小値を m_k とし,

$$A_n = \sum_{k=1}^n M_k (e^{\frac{k}{n}} - e^{\frac{k-1}{n}}),$$
$$B_n = \sum_{k=1}^n m_k (e^{\frac{k}{n}} - e^{\frac{k-1}{n}})$$

とおく。 A_n, B_n を求めよ。

- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ および $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n$ を求めよ。

- (4) 各 n に対して $B_n < \int_1^e f(x) dx < A_n$ であることを示せ。

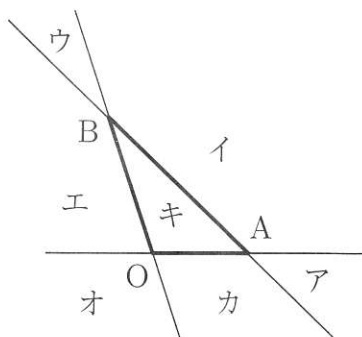
[IV] xy -平面上の原点を O とし、楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) を E とする。 E 上の点 $P(s, t)$ における E の法線と x 軸との交点を Q とする。点 P が $s > 0$, $t > 0$ の範囲を動くとき、 $\angle OPQ$ が最大になる点 P を求めよ。

[V] 四面体 $OABC$ において $OA = BC = 2$, $OB = 3$, $OC = AB = 4$, $AC = 2\sqrt{6}$ である。また、 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ とする。以下の間に答えよ。

(1) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \cdot \vec{c}$, $\vec{b} \cdot \vec{c}$ を求めよ。

(2) $\triangle OAB$ を含む平面を H とする。 H 上の点 P で直線 PC と H が直交するものをとる。このとき、 $\overrightarrow{OP} = x\vec{a} + y\vec{b}$ となる x, y を求めよ。

(3) 平面 H を直線 OA , AB , BO で右図のように7つの領域ア, イ, ウ, エ, オ, カ, キにわけろ。点 P はどの領域に入るか答えよ。



(4) 辺 AB で $\triangle ABC$ と $\triangle OAB$ のなす角は鋭角になるか、直角になるか、それとも鈍角になるかを判定せよ。ただし、1辺を共有する2つの三角形のなす角とは、共有する辺に直交する平面での2つの三角形の切り口のなす角のことである。

[以下 余 白]

このページは下書きに使用してよい。

このページは下書きに使用してよい。

