数　　学

(問　題)

2011年度

〈2011　H23053620〉

注　意　事　項

1. 問題冊子は，試験開始の指示があるまで開かないこと．
2. 問題は４～10ページに記載されている．試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁およびマーク解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督員に知らせること．
3. 解答はすべてマーク解答用紙の所定欄にＨＢの黒鉛筆またはＨＢのシャープペンシルでマークすること．
4. 氏名は，試験開始後，マーク解答用紙の所定欄に，正しくていねいに記入すること．
5. **問１**から**問７**までの $\boxed{ア}$，$\boxed{イ}$，$\boxed{ウ}$，…にはそれぞれ，−49，−48，…，−2，−1，0，1，2，…，48，49のいずれかが当てはまる．次の例にならって，マーク解答用紙の**ア**，**イ**，**ウ**，…で示された欄にマークして答えること．

   例．**ア**に3，**イ**に−5，**ウ**に30，**エ**に−24，**オ**に0と答えたいとき．

		十の位				一の位									
	−	1	2	3	4	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ア	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○	○	○
イ	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○
ウ	○	○	○	●	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○
エ	●	○	●	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○	○
オ	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○

6. マーク欄ははっきり記入すること．また，訂正する場合は，消しゴムでていねいに，消し残しがないようによく消すこと（砂消しゴムは使用しないこと）．

マークする時	●良い	○悪い	◐悪い
マークを消す時	○良い	○悪い	◐悪い

7. いかなる場合でも，マーク解答用紙は必ず提出すること．
8. 試験終了後，問題冊子は持ち帰ること．

問 1.

3 個の赤球と 4 個の白球が入った箱がある．この箱から 1 回に 1 つずつランダムに球を取り出すことを繰り返し，k 回目に初めて赤球を取り出したときに終了する．ただし，取り出した球は箱に戻さない．

(1) $k=3$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{35}$ である．

(2) k の期待値は $\boxed{\text{イ}}$ である．

問 2.

四面体 OABC の辺 AB，辺 OC の中点をそれぞれ M，N とし，△ABC の重心を G とする．また，線分 OG と線分 MN の交点を P とするとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{\boxed{\text{ウ}}}\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{\boxed{\text{エ}}}\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{1}{\boxed{\text{オ}}}\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

である．

問 3.

初項 1，公差 2 の等差数列 $\{a_n\}$ に対して，数列 $\{b_n\}$，$\{c_n\}$，$\{d_n\}$ をそれぞれ

$$b_n = \frac{2n+1}{a_n}, \quad c_n = \log_3 b_n, \quad d_n = \sum_{k=1}^{n} c_k$$

で定める．このとき，

$$d_n = \log_3 \left(\boxed{\text{カ}}\, n + \boxed{\text{キ}} \right)$$

となる．さらに，d_n が整数となるような n を小さい順に m 個並べて，その和を求めると，

$$\frac{\boxed{\text{ク}}^{\,m+1} + \boxed{\text{ケ}}\, m + \boxed{\text{コ}}}{4}$$

となる．

問4.

p, q を実数の定数とする．2次方程式 $x^2+px+q=0$ は連続した2個の整数を解にもち，2次方程式 $x^2+qx+p=0$ は少なくとも1つの正の整数を解にもつ．このような定数 p, q の組は2組あり，

$$(p,q)=\left(\boxed{\text{サ}},\boxed{\text{シ}}\right),\left(\boxed{\text{ス}},\boxed{\text{セ}}\right)$$

である．ただし，$\boxed{\text{サ}}<\boxed{\text{ス}}$ を満たすものとする．

問 5.

a を 0 でない実数とする．2 つの異なる曲線

$$C_1:\ y = x^2 - 2x + 5, \quad C_2:\ y = ax^2 + (1-3a)x + \frac{13}{8}$$

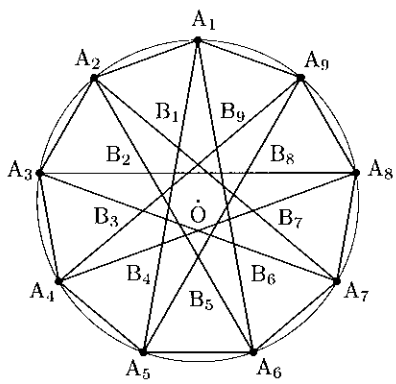
は，ある共有点 P で共通な接線 l をもつ．さらに，曲線 C_2 上の点 Q において l 以外の接線を，l と点 R で直交するように引く．このとき，a の値は $\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ であり，共通接線 l の方程式は $\boxed{\text{チ}}\,x - \boxed{\text{ツ}}\,y + \boxed{\text{テ}} = 0$ である．また，曲線 C_2 は △PQR の面積を $1 : \boxed{\text{ト}}$ に分ける．ただし，$\boxed{\text{タ}}$～$\boxed{\text{ト}}$ はできる限り小さい自然数で答えること．

問 6.

図のように，点 O を中心とする半径 1 の円に内接する正 9 角形の頂点 A_1，A_2，$\cdots$，A_9 から，長さが最大となる対角線を 2 本ずつ引き，それらの交点を B_1，B_2，$\cdots$，B_9 とする．これらの点を $A_1 \to B_1 \to A_2 \to B_2 \to \cdots \to A_9 \to B_9 \to A_1$ の順に線分で結んでできた図形を星型 S とよぶ．ここで，$\tan 10^\circ = a$ とするとき，$\triangle OA_1B_1$ の辺 OA_1 を底辺としたときの高さを h とすると

$$h = \frac{\boxed{ナ}\,a}{\boxed{ニ} - a^{\boxed{ヌ}}}$$

である．よって，星型 S の面積は $\boxed{ネ}\,h$ である．



問 7.

座標平面上の点 (x, y) の両座標とも整数のとき，その点を格子点という．本問では,「領域内」とはその領域の内部および境界線を含むものとする．

(1) 不等式 $|x| + 2|y| \leqq 4$ の表す領域を D とする．領域 D 内に格子点は $\boxed{\text{ノ}}$ 個ある．

(2) n を自然数として，不等式 $|x| + 2|y| \leqq 2n$ の表す領域を F とする．領域 F 内の格子点の総数は $\left(\boxed{\text{ハ}}n^2 + \boxed{\text{ヒ}}n + \boxed{\text{フ}}\right)$ 個である．

〔以　下　余　白〕