数　　　学

（問　題）

2011年度

〈2011　H23050111〉

注　意　事　項

1. 問題冊子および解答用紙は，試験開始の指示があるまで開かないこと。
2. 問題は２～３ページに記載されている。試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督員に知らせること。
3. 問１，問２，問３，問４の全問を解答すること。
4. 解答はすべて解答用紙の所定欄にＨＢの黒鉛筆またはＨＢのシャープペンシルで記入すること。コンパス，定規は使用してもよい。
5. 受験番号および氏名は，試験がはじまってから，解答用紙の所定欄（２か所）に正確に記入すること。

   受験番号の記入にあたっては，次の数字見本に従い，正確にていねいに記入すること。

数字見本	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

6. いかなる場合でも，解答用紙は必ず提出すること。
7. 試験終了後，問題冊子は持ち帰ること。

問1　曲線 $y = \log_4 x$ 上に，その x 座標を，それぞれ，$\frac{1}{2}t$，t，$2t$（$t > 0$）とする3点P，Q，Rをとる。このとき，PとRの距離は $\boxed{(ア)}$ であり，△PQRの面積は $\boxed{(イ)}$ である。空欄にあてはまる t の式を解答欄に記入せよ。

問2　次の問に答えよ。

（1）　a，b は整数で，2次方程式

$$x^2 + ax + b = 0 \quad \cdots\cdots \quad (\mathrm{A})$$

が異なる2つの実数解 α，β をもつとする。このとき，α，β はともに整数であるか，ともに無理数であるかのいずれかであることを証明する。以下の問に答え，証明を完成せよ。

まず，$b = 0$ のときは，$x^2 + ax = 0$ であるから（A）は整数解 0，$-a$ をもつ。以下では $b \neq 0$ とする。

解と係数の関係より $\alpha + \beta = -a$，$\alpha\beta = b$ であり，これらは整数である。有理数と無理数の和は有理数でなく，整数と整数以外の有理数の和は整数でないという事実を用いると，α，β がともに整数以外の有理数であるとして矛盾を導けばよい。

そこで，α，β が2以上の整数 p_1，p_2 と，0でない整数 q_1，q_2 を用いて，既約分数

$$\alpha = \frac{q_1}{p_1}, \quad \beta = \frac{q_2}{p_2}$$

で表されると仮定する。ここに，$\frac{q_i}{p_i}$（$i = 1, 2$）が既約分数であるとは，p_i と $|q_i|$ の最大公約数が1であることをいう。このとき，

$$\alpha + \beta = \frac{p_2 q_1 + p_1 q_2}{p_1 p_2} \quad \cdots\cdots \quad ①$$

$$\alpha\beta = \frac{q_1 q_2}{p_1 p_2} \quad \cdots\cdots \quad ②$$

である。

問①　①において，$\alpha + \beta$ が整数であることを用いて，$p_1 = p_2$ であることを示せ。

問②　②において，$\alpha\beta$ が整数であることと**問①**の結果から，既約分数の仮定に矛盾することを示せ。

問②の結果から，α，β はともに整数であるか，ともに無理数であることが示された。

（2）　c が自然数のとき，$\sqrt{c}$ は自然数であるか無理数であることを証明せよ。

問3　1回投げて表が出る確率 p，裏が出る確率 $1-p$ のコインが1枚ある。このコインを1日に4回投げる試行をTとする。このとき，次の各問に答えよ。答のみ解答欄に記入せよ。

（1）　試行Tにおいて，2回以上表が出る確率 A を，p の多項式として降べきの順に表せ。

（2）　試行Tを5日間続ける試行をSとする。

（i）　試行Sにおいて，5日間の中でちょうど3日だけ1日に2回以上表が出て，かつ，2日以上連続して1日に2回以上表が出る確率を，A を用いて表せ。

（ii）　試行Sにおいて，2日以上連続して1日に2回以上表が出る確率を，A の多項式として降べきの順に表せ。

問4　$a>0$ とし，x-y 平面上に3点O$(0,\ 0)$，A$(a,\ 0)$，P$(x,\ y)$ をとる。l を与えられた正定数として，Pが

$$2\mathrm{PO}^2+\mathrm{PA}^2=3l^2 \quad \cdots\cdots \quad (*)$$

をみたすとする。このとき，次の各問に答えよ。

（1）　$(*)$ をみたすPの集合が空集合とならないための a の条件を求め，そのときのP$(x,\ y)$ の軌跡を表す方程式を求めよ。

（2）　3点O，A，Pが一直線上にないようなPが存在するとき，OAを軸として，△POAを回転して立体をつくる。この立体の体積が最大となるときのPの x 座標と最大の体積 V を，a を用いて表せ。答のみ解答欄に記入せよ。

（3）　（2）で求めた体積 V を最大とする a の値とそのときの最大の体積を求めよ。

〔以　下　余　白〕