入学試験問題 前

数　学(文科)

(配点 80 点)

令和 2 年 2 月 25 日　　14 時—15 時 40 分

注 意 事 項

1 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはいけません。

2 この問題冊子は全部で 14 ページあります。落丁，乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら，手を挙げて監督者に知らせなさい。

3 解答には，必ず黒色鉛筆(または黒色シャープペンシル)を使用しなさい。

4 **解答用紙の指定欄に，受験番号(表面 2 箇所，裏面 1 箇所)，科類，氏名を記入しなさい。指定欄以外にこれらを記入してはいけません。**

5 **解答は，必ず解答用紙の指定された箇所に記入しなさい。**

6 **解答用紙の解答欄に，関係のない文字，記号，符号などを記入してはいけません。また，解答用紙の欄外の余白には，何も書いてはいけません。**

7 この問題冊子の余白は，計算用に使用してもよいが，どのページも切り離してはいけません。

8 解答用紙は，持ち帰ってはいけません。

9 試験終了後，問題冊子は持ち帰りなさい。

◇M3(249—40)

計 算 用 紙

（切り離さないで用いよ。）

第　1　問

$a > 0,\ b > 0$ とする。座標平面上の曲線

$$C: \quad y = x^3 - 3ax^2 + b$$

が，以下の 2 条件を満たすとする。

条件 1 ： C は x 軸に接する。

条件 2 ： x 軸と C で囲まれた領域（境界は含まない）に，x 座標と y 座標がともに整数である点がちょうど 1 個ある。

b を a で表し，a のとりうる値の範囲を求めよ。

計 算 用 紙

（切り離さないで用いよ。）

第 2 問

座標平面上に 8 本の直線

$$x = a \qquad (a = 1,\ 2,\ 3,\ 4), \qquad\qquad y = b \qquad (b = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

がある。以下，16 個の点

$$(a,\ b) \qquad (a = 1,\ 2,\ 3,\ 4, \quad b = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

から異なる 5 個の点を選ぶことを考える。

(1) 次の条件を満たす 5 個の点の選び方は何通りあるか。

上の 8 本の直線のうち，選んだ点を 1 個も含まないものがちょうど 2 本ある。

(2) 次の条件を満たす 5 個の点の選び方は何通りあるか。

上の 8 本の直線は，いずれも選んだ点を少なくとも 1 個含む。

計 算 用 紙

（切り離さないで用いよ。）

第 3 問

O を原点とする座標平面において，放物線

$$y = x^2 - 2x + 4$$

のうち $x \geqq 0$ を満たす部分を C とする。

(1) 点 P が C 上を動くとき，O を端点とする半直線 OP が通過する領域を図示せよ。

(2) 実数 a に対して，直線

$$l: \quad y = ax$$

を考える。次の条件を満たす a の範囲を求めよ。

C 上の点 A と l 上の点 B で，3 点 O, A, B が正三角形の 3 頂点となるものがある。

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

第　4　問

n, k を，$1 \leqq k \leqq n$ を満たす整数とする。n 個の整数

$$2^m \quad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1)$$

から異なる k 個を選んでそれらの積をとる。k 個の整数の選び方すべてに対しこのように積をとることにより得られる ${}_n\mathrm{C}_k$ 個の整数の和を $a_{n,k}$ とおく。例えば,

$$a_{4,3} = 2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^2 + 2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^3 + 2^0 \cdot 2^2 \cdot 2^3 + 2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 = 120$$

である。

(1) 2 以上の整数 n に対し，$a_{n,2}$ を求めよ。

(2) 1 以上の整数 n に対し，x についての整式

$$f_n(x) = 1 + a_{n,1}x + a_{n,2}x^2 + \cdots\cdots + a_{n,n}x^n$$

を考える。$\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$ と $\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)}$ を x についての整式として表せ。

(3) $\dfrac{a_{n+1,k+1}}{a_{n,k}}$ を n, k で表せ。

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）