

入学試験問題

数学(文科)



(配点 80 点)

令和 2 年 2 月 25 日 14 時—15 時 40 分

注意事項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 14 ページあります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆(または黒色シャープペンシル)を使用しなさい。
- 4 解答用紙の指定欄に、受験番号(表面 2 箇所、裏面 1 箇所)、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外にこれらを記入してはいけません。
- 5 解答は、必ず解答用紙の指定された箇所に記入しなさい。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。また、解答用紙の欄外の余白には、何も書いてはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 解答用紙は、持ち帰ってはいけません。
- 9 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。



臺灣學術研究 （中文）卷

（第一輯）

臺灣學術研究社編印

目次

一、臺灣學術研究社的成立與發展
（一）臺灣學術研究社的成立
（二）臺灣學術研究社的發展

二、臺灣學術研究社的學術研究

（一）臺灣學術研究社的學術研究概況
（二）臺灣學術研究社的學術研究特色

三、臺灣學術研究社的學術研究成就

（一）臺灣學術研究社的學術研究成就概況
（二）臺灣學術研究社的學術研究成就特色

四、臺灣學術研究社的學術研究展望

（一）臺灣學術研究社的學術研究展望概況
（二）臺灣學術研究社的學術研究展望特色

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

$$d + \frac{1}{2} \log \frac{1}{r} = y \quad (1)$$

この式は、 d と $\log \frac{1}{r}$ の間に直線関係があることを示している。この直線の傾きを $\frac{1}{2}$ とし、 y 軸との切片を d とすれば、式(1)が得られる。したがって、 d の値を求めれば、 y の値が求まる。また、 y の値がわかれば、 d の値も求まる。このように、 d と y の関係を利用して、 d の値を求めたり、 y の値を求めたりすることができる。

第 1 問

$a > 0, b > 0$ とする。座標平面上の曲線

$$C: y = x^3 - 3ax^2 + b$$

が、以下の 2 条件を満たすとする。

条件 1 : C は x 軸に接する。

条件 2 : x 軸と C で囲まれた領域 (境界は含まない) に、 x 座標と y 座標がともに整数である点がちょうど 1 個ある。

b を a で表し、 a のとりうる値の範囲を求めよ。

計算用紙

(切り離さないで用いよ。) 幾何の本 8 二平面型

$$(4, 3, 2, 1 = 0) \quad \theta = \psi \quad (4, 3, 2, 1 = 0) \quad \alpha = \pi$$

点の間の距離を d とする。

$$(4, 3, 2, 1 = 0) \quad (4, 3, 2, 1 = 0) \quad (0, 0)$$

異なる二つの直線の交点の座標を (x, y) とする。

(1) 次の条件を満たす二直線の交点の座標を求めよ。

上の二本の直線は、互いに平行でない。また、その傾きの比は $1/2$ である。

(2) 次の条件を満たす二直線の交点の座標を求めよ。

上の二本の直線は、互いに垂直である。また、その傾きの比は $1/2$ である。

第 2 問

座標平面上に 8 本の直線

$$x = a \quad (a = 1, 2, 3, 4), \quad y = b \quad (b = 1, 2, 3, 4)$$

がある。以下, 16 個の点

$$(a, b) \quad (a = 1, 2, 3, 4, \quad b = 1, 2, 3, 4)$$

から異なる 5 個の点を選ぶことを考える。

(1) 次の条件を満たす 5 個の点の選び方は何通りあるか。

上の 8 本の直線のうち, 選んだ点を 1 個も含まないものがちょうど 2 本ある。

(2) 次の条件を満たす 5 個の点の選び方は何通りあるか。

上の 8 本の直線は, いずれも選んだ点を少なくとも 1 個含む。

計算問題用紙

(切り離さないで用いよ。)

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

(1) 点 P を C に移動せよ。O を通過する半直線 OP を通過する領域を求めよ。

(2) 点 P に対して、直線

$$y = x + 1$$

を定める。次の条件を満たす P の範囲を求めよ。

C の点 A, P, B の点 B, C の点 O, A, B を正三角形の 3 頂点とするとき

ある。

第 3 問

O を原点とする座標平面において、放物線

$$y = x^2 - 2x + 4$$

のうち $x \geq 0$ を満たす部分を C とする。

(1) 点 P が C 上を動くとき、O を端点とする半直線 OP が通過する領域を図示せよ。

(2) 実数 a に対して、直線

$$l: y = ax$$

を考える。次の条件を満たす a の範囲を求めよ。

C 上の点 A と l 上の点 B で、3 点 O, A, B が正三角形の 3 頂点となるものがある。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。) n を正の整数とし、 $n \geq 1$ とし、 x

$$(1-x)^n = 1 - nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{6}x^3 + \dots + (-1)^n x^n$$

この式は二項定理の特殊の場合である。左辺の展開係数は、右辺の展開係数と等しい。この式を $x=1$ とおくと、 $0 = 1 - n + \frac{n(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{6} + \dots + (-1)^n$ となる。

$$0 = 1 - n + \frac{n(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{6} + \dots + (-1)^n$$

(1) $x=1$ のとき、 $(1-x)^n$ の展開係数を求めよ。

(2) $x=1$ のとき、 $(1-x)^n$ の展開係数の和を求めよ。

$$1 - n + \frac{n(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{6} + \dots + (-1)^n = 0$$

これを x の関数 $f(x) = (1-x)^n$ とおくと、 $f(1) = 0$ となる。

$$f'(x) = -n(1-x)^{n-1} \quad (3)$$

第 4 問

n, k を, $1 \leq k \leq n$ を満たす整数とする。 n 個の整数

$$2^m \quad (m = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

から異なる k 個を選んでそれらの積をとる。 k 個の整数の選び方すべてに対しこのように積をとることにより得られる ${}_n C_k$ 個の整数の和を $a_{n,k}$ とおく。例えば,

$$a_{4,3} = 2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^2 + 2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^3 + 2^0 \cdot 2^2 \cdot 2^3 + 2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 = 120$$

である。

(1) 2 以上の整数 n に対し, $a_{n,2}$ を求めよ。

(2) 1 以上の整数 n に対し, x についての整式

$$f_n(x) = 1 + a_{n,1}x + a_{n,2}x^2 + \dots + a_{n,n}x^n$$

を考える。 $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$ と $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)}$ を x についての整式として表せ。

(3) $\frac{a_{n+1,k+1}}{a_{n,k}}$ を n, k で表せ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

