入 学 試 験 問 題

前

数　学(理科)

(配点 120 点)

平成 31 年 2 月 25 日　　14 時—16 時 30 分

注 意 事 項

1 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはいけません。

2 この問題冊子は全部で 20 ページあります。落丁，乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら，手を挙げて監督者に知らせなさい。

3 解答には，必ず黒色鉛筆(または黒色シャープペンシル)を使用しなさい。

4 2 枚の解答用紙が渡されますが，青色刷りの第 1 解答用紙には，第 1 問～第 3 問について，茶色刷りの第 2 解答用紙には，第 4 問～第 6 問について解答しなさい。

5 **解答用紙の指定欄に，受験番号(表面 2 箇所，裏面 1 箇所)，科類，氏名を記入しなさい。指定欄以外にこれらを記入してはいけません。**

6 **解答は，必ず解答用紙の指定された箇所に記入しなさい。**

7 **解答用紙の解答欄に，関係のない文字，記号，符号などを記入してはいけません。また，解答用紙の欄外の余白には，何も書いてはいけません。**

8 この問題冊子の余白は，計算用に使用してもよいが，どのページも切り離してはいけません。

9 解答用紙は，持ち帰ってはいけません。

10 試験終了後，問題冊子は持ち帰りなさい。

◇M4(129—50)

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

第　1　問

次の定積分を求めよ。

$$\int_0^1 \left(x^2 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\left(1 + \frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\right)dx$$

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

第　2　問

一辺の長さが 1 の正方形 ABCD を考える。3 点 P, Q, R はそれぞれ辺 AB, AD, CD 上にあり，3 点 A, P, Q および 3 点 P, Q, R はどちらも面積が $\frac{1}{3}$ の三角形の 3 頂点であるとする。

$\dfrac{\mathrm{DR}}{\mathrm{AQ}}$ の最大値，最小値を求めよ。

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

第　3　問

座標空間内に 5 点 $A(2,\ 0,\ 0)$, $B(0,\ 2,\ 0)$, $C(-2,\ 0,\ 0)$, $D(0,\ -2,\ 0)$, $E(0,\ 0,\ -2)$ を考える。線分 AB の中点 M と線分 AD の中点 N を通り，直線 AE に平行な平面を α とする。さらに，p は $2 < p < 4$ をみたす実数とし，点 $P(p,\ 0,\ 2)$ を考える。

(1) 八面体 PABCDE の平面 $y = 0$ による切り口および，平面 α の平面 $y = 0$ による切り口を同一平面上に図示せよ。

(2) 八面体 PABCDE の平面 α による切り口が八角形となる p の範囲を求めよ。

(3) 実数 p が (2) で定まる範囲にあるとする。八面体 PABCDE の平面 α による切り口のうち $y \geqq 0$, $z \geqq 0$ の部分を点 $(x,\ y,\ z)$ が動くとき，座標平面上で点 $(y,\ z)$ が動く範囲の面積を求めよ。

計 算 用 紙

（切り離さないで用いよ。）

第 4 問

n を 1 以上の整数とする。

(1) n^2+1 と $5n^2+9$ の最大公約数 d_n を求めよ。

(2) $(n^2+1)(5n^2+9)$ は整数の 2 乗にならないことを示せ。

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

第　5　問

以下の問いに答えよ。

(1) n を 1 以上の整数とする。x についての方程式

$$x^{2n-1} = \cos x$$

は，ただ一つの実数解 a_n をもつことを示せ。

(2) (1) で定まる a_n に対し，$\cos a_n > \cos 1$ を示せ。

(3) (1) で定まる数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n, \cdots\cdots$ に対し，

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n, \qquad b = \lim_{n\to\infty} a_n^n, \qquad c = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^n - b}{a_n - a}$$

を求めよ。

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

第　6　問

複素数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ および実数 a, b が，次の 3 条件をみたしながら動く。

条件 1 ： $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は相異なる。

条件 2 ： $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は 4 次方程式 $z^4 - 2z^3 - 2az + b = 0$ の解である。

条件 3 ： 複素数 $\alpha\beta + \gamma\delta$ の実部は 0 であり，虚部は 0 でない。

(1) $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ のうち，ちょうど 2 つが実数であり，残りの 2 つは互いに共役な複素数であることを示せ。

(2) b を a で表せ。

(3) 複素数 $\alpha + \beta$ がとりうる範囲を複素数平面上に図示せよ。

計 算 用 紙

（切り離さないで用いよ。）

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）