

# 入学試験問題

## 数学(理科)



(配点 120 点)

平成 30 年 2 月 25 日 14 時—16 時 30 分

### 注意事項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 20 ページあります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆(または黒色シャープペンシル)を使用しなさい。
- 4 2 枚の解答用紙が渡されますが、青色刷りの第 1 解答用紙には、第 1 問～第 3 問について、茶色刷りの第 2 解答用紙には、第 4 問～第 6 問について解答しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号(表面 2 箇所、裏面 1 箇所)、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外にこれらを記入してはいけません。
- 6 解答は、必ず解答用紙の指定された箇所に記入しなさい。
- 7 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。また、解答用紙の欄外の余白には、何も書いてはいけません。
- 8 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 9 解答用紙は、持ち帰ってはいけません。
- 10 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。



# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

## 第 1 問

関数

$$f(x) = \frac{x}{\sin x} + \cos x \quad (0 < x < \pi)$$

の増減表をつくり、 $x \rightarrow +0$ ,  $x \rightarrow \pi - 0$  のときの極限を調べよ。

# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

## 第 2 問

数列  $a_1, a_2, \dots$  を

$$a_n = \frac{{}^{2n+1}C_n}{n!} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

で定める。

- (1)  $n \geq 2$  とする。  $\frac{a_n}{a_{n-1}}$  を既約分数  $\frac{q_n}{p_n}$  として表したときの分母  $p_n \geq 1$  と分子  $q_n$  を求めよ。
- (2)  $a_n$  が整数となる  $n \geq 1$  をすべて求めよ。

# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

### 第 3 問

放物線  $y = x^2$  のうち  $-1 \leq x \leq 1$  をみたす部分を  $C$  とする。座標平面上の原点  $O$  と点  $A(1, 0)$  を考える。 $k > 0$  を実数とする。点  $P$  が  $C$  上を動き、点  $Q$  が線分  $OA$  上を動くとき、

$$\overrightarrow{OR} = \frac{1}{k} \overrightarrow{OP} + k \overrightarrow{OQ}$$

をみたす点  $R$  が動く領域の面積を  $S(k)$  とする。

$S(k)$  および  $\lim_{k \rightarrow +0} S(k)$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} S(k)$  を求めよ。



# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

#### 第 4 問

$a > 0$  とし,

$$f(x) = x^3 - 3a^2x$$

とおく。次の 2 条件をみたす点  $(a, b)$  の動きうる範囲を求め、座標平面上に図示せよ。

条件 1 : 方程式  $f(x) = b$  は相異なる 3 実数解をもつ。

条件 2 : さらに、方程式  $f(x) = b$  の解を  $\alpha < \beta < \gamma$  とすると  $\beta > 1$  である。

# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 5 問

複素数平面上の原点を中心とする半径 1 の円を  $C$  とする。点  $P(z)$  は  $C$  上にあり、点  $A(1)$  とは異なるとする。点  $P$  における円  $C$  の接線に関して、点  $A$  と対称な点を  $Q(u)$  とする。 $w = \frac{1}{1-u}$  とおき、 $w$  と共役な複素数を  $\bar{w}$  で表す。

- (1)  $u$  と  $\frac{\bar{w}}{w}$  を  $z$  についての整式として表し、絶対値の商  $\frac{|w + \bar{w} - 1|}{|w|}$  を求めよ。
- (2)  $C$  のうち実部が  $\frac{1}{2}$  以下の複素数で表される部分を  $C'$  とする。点  $P(z)$  が  $C'$  上を動くときの点  $R(w)$  の軌跡を求めよ。

# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

## 第 6 問

座標空間内の4点  $O(0, 0, 0)$ ,  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(1, 1, 0)$ ,  $C(1, 1, 1)$  を考える。

$\frac{1}{2} < r < 1$  とする。点  $P$  が線分  $OA$ ,  $AB$ ,  $BC$  上を動くときに点  $P$  を中心とする半径  $r$  の球 (内部を含む) が通過する部分を, それぞれ  $V_1, V_2, V_3$  とする。

- (1) 平面  $y = t$  が  $V_1, V_3$  双方と共有点をもつような  $t$  の範囲を与えよ。さらに, この範囲の  $t$  に対し, 平面  $y = t$  と  $V_1$  の共通部分および, 平面  $y = t$  と  $V_3$  の共通部分を同一平面上に図示せよ。
- (2)  $V_1$  と  $V_3$  の共通部分が  $V_2$  に含まれるための  $r$  についての条件を求めよ。
- (3)  $r$  は (2) の条件をみたすとする。  $V_1$  の体積を  $S$  とし,  $V_1$  と  $V_2$  の共通部分の体積を  $T$  とする。  $V_1, V_2, V_3$  を合わせて得られる立体  $V$  の体積を  $S$  と  $T$  を用いて表せ。
- (4) ひきつづき  $r$  は (2) の条件をみたすとする。  $S$  と  $T$  を求め,  $V$  の体積を決定せよ。

# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)



# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)