入学試験問題

前

数　学(理科)

(配点120点)

平成28年2月25日　　14時—16時30分

注　意　事　項

1　試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはいけません。

2　この問題冊子は全部で20ページあります。落丁，乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら，手を挙げて監督者に知らせなさい。

3　解答には，必ず黒色鉛筆(または黒色シャープペンシル)を使用しなさい。

4　2枚の解答用紙が渡されますが，青色刷りの第1解答用紙には，第1問～第3問について，茶色刷りの第2解答用紙には，第4問～第6問について解答しなさい。

5　**解答用紙の指定欄に，受験番号(表面2箇所，裏面1箇所)，科類，氏名を記入しなさい。指定欄以外にこれらを記入してはいけません。**

6　**解答は，必ず解答用紙の指定された箇所に記入しなさい。**

7　**解答用紙の解答欄に，関係のない文字，記号，符号などを記入してはいけません。また，解答用紙の欄外の余白には，何も書いてはいけません。**

8　この問題冊子の余白は，計算用に使用してもよいが，どのページも切り離してはいけません。

9　解答用紙は，持ち帰ってはいけません。

10　試験終了後，問題冊子は持ち帰りなさい。

◇M4(494—54)

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

第　1　問

e を自然対数の底, すなわち $e = \lim_{t \to \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t$ とする。すべての正の実数 x に対し, 次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x + \frac{1}{2}}$$

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

第　2　問

A, B, C の 3 つのチームが参加する野球の大会を開催する。以下の方式で試合を行い，2 連勝したチームが出た時点で，そのチームを優勝チームとして大会は終了する。

(a) 1 試合目で A と B が対戦する。

(b) 2 試合目で，1 試合目の勝者と，1 試合目で待機していた C が対戦する。

(c) k 試合目で優勝チームが決まらない場合は，k 試合目の勝者と，k 試合目で待機していたチームが $k+1$ 試合目で対戦する。ここで k は 2 以上の整数とする。

なお，すべての対戦において，それぞれのチームが勝つ確率は $\frac{1}{2}$ で，引き分けはないものとする。

(1) n を 2 以上の整数とする。ちょうど n 試合目で A が優勝する確率を求めよ。

(2) m を正の整数とする。総試合数が $3m$ 回以下で A が優勝したとき，A の最後の対戦相手が B である条件付き確率を求めよ。

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

第　3　問

a を $1 < a < 3$ をみたす実数とし，座標空間内の 4 点 $\mathrm{P_1}(1, 0, 1)$, $\mathrm{P_2}(1, 1, 1)$, $\mathrm{P_3}(1, 0, 3)$, $\mathrm{Q}(0, 0, a)$ を考える。直線 $\mathrm{P_1Q}$, $\mathrm{P_2Q}$, $\mathrm{P_3Q}$ と xy 平面の交点をそれぞれ $\mathrm{R_1}$, $\mathrm{R_2}$, $\mathrm{R_3}$ として，三角形 $\mathrm{R_1R_2R_3}$ の面積を $S(a)$ とする。$S(a)$ を最小にする a と，そのときの $S(a)$ の値を求めよ。

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

第　4　問

z を複素数とする。複素数平面上の3点 $\mathrm{A}(1)$, $\mathrm{B}(z)$, $\mathrm{C}(z^2)$ が鋭角三角形をなすような z の範囲を求め, 図示せよ。

計 算 用 紙

（切り離さないで用いよ。）

第　5　問

k を正の整数とし，10 進法で表された小数点以下 k 桁の実数

$$0.a_1a_2\cdots a_k = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_k}{10^k}$$

を 1 つとる。ここで, $a_1, a_2, \cdots, a_k$ は 0 から 9 までの整数で, $a_k \fallingdotseq 0$ とする。

(1) 次の不等式をみたす正の整数 n をすべて求めよ。

$$0.a_1a_2\cdots a_k \leqq \sqrt{n} - 10^k < 0.a_1a_2\cdots a_k + 10^{-k}$$

(2) p が $5\cdot 10^{k-1}$ 以上の整数ならば，次の不等式をみたす正の整数 m が存在することを示せ。

$$0.a_1a_2\cdots a_k \leqq \sqrt{m} - p < 0.a_1a_2\cdots a_k + 10^{-k}$$

(3) 実数 x に対し，$r \leqq x < r+1$ をみたす整数 r を $[x]$ で表す。$\sqrt{s}-[\sqrt{s}\,] = 0.a_1a_2\cdots a_k$ をみたす正の整数 s は存在しないことを示せ。

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

第　6　問

座標空間内を, 長さ 2 の線分 AB が次の 2 条件 (a), (b) をみたしながら動く。

(a) 点 A は平面 $z = 0$ 上にある。

(b) 点 $\mathrm{C}(0, 0, 1)$ が線分 AB 上にある。

このとき, 線分 AB が通過することのできる範囲を K とする。K と不等式 $z \geqq 1$ の表す範囲との共通部分の体積を求めよ。

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

計 算 用 紙

（切り離さないで用いよ。）