入 学 試 験 問 題

前

数　学(理科)

(配点 120 点)

平成 27 年 2 月 25 日　　14 時—16 時 30 分

注 意 事 項

1　試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはいけません。

2　問題はすべて新課程と旧課程とに共通です。

3　この問題冊子は全部で 20 ページあります。落丁，乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら，手を挙げて監督者に知らせなさい。

4　解答には，必ず黒色鉛筆(または黒色シャープペンシル)を使用しなさい。

5　2 枚の解答用紙が渡されますが，青色刷りの第 1 解答用紙には，第 1 問～第 3 問について，茶色刷りの第 2 解答用紙には，第 4 問～第 6 問について解答しなさい。

6　**解答用紙の指定欄に，受験番号(表面 2 箇所，裏面 1 箇所)，科類，氏名を記入しなさい。指定欄以外にこれらを記入してはいけません。**

7　**解答は，必ず解答用紙の指定された箇所に記入しなさい。**

8　**解答用紙の解答欄に，関係のない文字，記号，符号などを記入してはいけません。また，解答用紙の欄外の余白には，何も書いてはいけません。**

9　この問題冊子の余白は，計算用に使用してもよいが，どのページも切り離してはいけません。

10　解答用紙は，持ち帰ってはいけません。

11　試験終了後，問題冊子は持ち帰りなさい。

第　1　問

正の実数 a に対して，座標平面上で次の放物線を考える。

$$C: \quad y = ax^2 + \frac{1-4a^2}{4a}$$

a が正の実数全体を動くとき，C の通過する領域を図示せよ。

第　2　問

どの目も出る確率が $\frac{1}{6}$ のさいころを1つ用意し，次のように左から順に文字を書く。

さいころを投げ，出た目が 1，2，3 のときは文字列 A A を書き，4 のときは文字 B を，5 のときは文字 C を，6 のときは文字 D を書く。さらに繰り返しさいころを投げ，同じ規則に従って，A A，B，C，D をすでにある文字列の右側につなげて書いていく。

たとえば，さいころを 5 回投げ，その出た目が順に 2，5，6，3，4 であったとすると，得られる文字列は，

A A C D A A B

となる。このとき，左から 4 番目の文字は D，5 番目の文字は A である。

(1) n を正の整数とする。n 回さいころを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から n 番目の文字が A となる確率を求めよ。

(2) n を 2 以上の整数とする。n 回さいころを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から $n-1$ 番目の文字が A で，かつ n 番目の文字が B となる確率を求めよ。

第　3　問

a を正の実数とし，p を正の有理数とする。

座標平面上の２つの曲線 $y = ax^p$ $(x > 0)$ と $y = \log x$ $(x > 0)$ を考える。この２つの曲線の共有点が１点のみであるとし，その共有点を Q とする。

以下の問いに答えよ。必要であれば，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^p}{\log x} = \infty$ を証明なしに用いてよい。

(1) a および点 Q の x 座標を p を用いて表せ。

(2) この２つの曲線と x 軸で囲まれる図形を，x 軸のまわりに１回転してできる立体の体積を p を用いて表せ。

(3) (2) で得られる立体の体積が 2π になるときの p の値を求めよ。

第　4　問

数列 $\{p_n\}$ を次のように定める。

$$p_1 = 1, \quad p_2 = 2, \quad p_{n+2} = \frac{p_{n+1}^2 + 1}{p_n} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(1) $\dfrac{p_{n+1}^2 + p_n^2 + 1}{p_{n+1}\, p_n}$ が n によらないことを示せ。

(2) すべての $n = 2, 3, 4, \cdots$ に対し，$p_{n+1} + p_{n-1}$ を p_n のみを使って表せ。

(3) 数列 $\{q_n\}$ を次のように定める。

$$q_1 = 1, \quad q_2 = 1, \quad q_{n+2} = q_{n+1} + q_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

すべての $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対し，$p_n = q_{2n-1}$ を示せ。

第　5　問

m を 2015 以下の正の整数とする。${}_{2015}\mathrm{C}_m$ が偶数となる最小の m を求めよ。

第　6　問

n を正の整数とする。以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $g(x)$ を次のように定める。

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos(\pi x)+1}{2} & (\ |x|\leqq 1\ のとき) \\ 0 & (\ |x|>1\ のとき)\end{cases}$$

$f(x)$ を連続な関数とし，p，q を実数とする。$|x|\leqq\dfrac{1}{n}$ をみたす x に対して $p\leqq f(x)\leqq q$ が成り立つとき，次の不等式を示せ。

$$p\leqq n\int_{-1}^{1}g(nx)f(x)\,dx\leqq q$$

(2) 関数 $h(x)$ を次のように定める。

$$h(x)=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}\sin(\pi x) & (\ |x|\leqq 1\ のとき) \\ 0 & (\ |x|>1\ のとき)\end{cases}$$

このとき，次の極限を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty} n^2\int_{-1}^{1}h(nx)\log(1+e^{x+1})\,dx$$