入 学 試 験 問 題

数　学(文科)

前

(配点 80 点)

平成 26 年 2 月 25 日　　14 時—15 時 40 分

注 意 事 項

1　試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはいけません。

2　この問題冊子は全部で 14 ページあります。落丁，乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら，手を挙げて監督者に知らせなさい。

3　解答には，必ず黒色鉛筆(または黒色シャープペンシル)を使用しなさい。

4　**解答用紙の指定欄に，受験番号(表面 2 箇所，裏面 1 箇所)，科類，氏名を記入しなさい。指定欄以外にこれらを記入してはいけません。**

5　**解答は，必ず解答用紙の指定された箇所に記入しなさい。**

6　**解答用紙の解答欄に，関係のない文字，記号，符号などを記入してはいけません。また，解答用紙の欄外の余白には，何も書いてはいけません。**

7　この問題冊子の余白は，計算用に使用してもよいが，どのページも切り離してはいけません。

8　解答用紙は，持ち帰ってはいけません。

9　試験終了後，問題冊子は持ち帰りなさい。

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

第　1　問

以下の問いに答えよ。

(1)　t を実数の定数とする。実数全体を定義域とする関数 $f(x)$ を

$$f(x) = -2x^2 + 8tx - 12x + t^3 - 17t^2 + 39t - 18$$

と定める。このとき，関数 $f(x)$ の最大値を t を用いて表せ。

(2)　(1) の「関数 $f(x)$ の最大値」を $g(t)$ とする。t が $t \geqq -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の範囲を動くとき，$g(t)$ の最小値を求めよ。

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

第 2 問

a を自然数（すなわち 1 以上の整数）の定数とする。

白球と赤球があわせて 1 個以上入っている袋 U に対して，次の操作 (*) を考える。

(*)　袋 U から球を 1 個取り出し，

(i)　取り出した球が白球のときは，袋 U の中身が白球 a 個，赤球 1 個となるようにする。

(ii)　取り出した球が赤球のときは，その球を袋 U へ戻すことなく，袋 U の中身はそのままにする。

はじめに袋 U の中に，白球が $a+2$ 個，赤球が 1 個入っているとする。この袋 U に対して操作 (*) を繰り返し行う。

たとえば，1 回目の操作で白球が出たとすると，袋 U の中身は白球 a 個，赤球 1 個となり，さらに 2 回目の操作で赤球が出たとすると，袋 U の中身は白球 a 個のみとなる。

n 回目に取り出した球が赤球である確率を p_n とする。ただし，袋 U の中の個々の球の取り出される確率は等しいものとする。

(1)　p_1，p_2 を求めよ。

(2)　$n \geqq 3$ に対して p_n を求めよ。

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

第　3　問

座標平面の原点を O で表す。

線分 $y = \sqrt{3}x$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ 上の点 P と，線分 $y = -\sqrt{3}x$ $(-3 \leqq x \leqq 0)$ 上の点 Q が，線分 OP と 線分 OQ の長さの和が 6 となるように動く。このとき，線分 PQ の通過する領域を D とする。

(1)　s を $-3 \leqq s \leqq 2$ をみたす実数とするとき，点 (s, t) が D に入るような t の範囲を求めよ。

(2)　D を図示せよ。

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

第　4　問

r を 0 以上の整数とし，数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

$$a_1 = r, \quad a_2 = r+1, \quad a_{n+2} = a_{n+1}(a_n+1) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

また，素数 p を 1 つとり，a_n を p で割った余りを b_n とする。ただし，0 を p で割った余りは 0 とする。

(1)　自然数 n に対し，b_{n+2} は $b_{n+1}(b_n+1)$ を p で割った余りと一致することを示せ。

(2)　$r=2$，$p=17$ の場合に，10 以下のすべての自然数 n に対して，b_n を求めよ。

(3)　ある 2 つの相異なる自然数 n，m に対して，

$$b_{n+1} = b_{m+1} > 0, \quad b_{n+2} = b_{m+2}$$

が成り立ったとする。このとき，$b_n = b_m$ が成り立つことを示せ。

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）