

# 入学試験問題

## 数学(理科)



(配点 120 点)

平成 25 年 2 月 25 日 14 時—16 時 30 分

### 注意事項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 20 ページあります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆(または黒色シャープペンシル)を使用しなさい。
- 4 2 枚の解答用紙が渡されますが、青色刷りの第 1 解答用紙には、第 1 問～第 3 問について、茶色刷りの第 2 解答用紙には、第 4 問～第 6 問について解答しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号(表面 2 箇所、裏面 1 箇所)、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外にこれらを記入してはいけません。
- 6 解答は、必ず解答用紙の指定された箇所に記入しなさい。
- 7 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。また、解答用紙の欄外の余白には、何も書いてはいけません。
- 8 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 9 解答用紙は、持ち帰ってはいけません。
- 10 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。



# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

## 第 1 問

実数  $a, b$  に対し平面上の点  $P_n(x_n, y_n)$  を

$$(x_0, y_0) = (1, 0)$$

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = (ax_n - by_n, bx_n + ay_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

によって定める。このとき、次の条件 (i), (ii) がともに成り立つような  $(a, b)$  をすべて求めよ。

(i)  $P_0 = P_6$

(ii)  $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$  は相異なる。

# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

## 第 2 問

$a$  を実数とし,  $x > 0$  で定義された関数  $f(x)$ ,  $g(x)$  を次のように定める。

$$f(x) = \frac{\cos x}{x}$$

$$g(x) = \sin x + ax$$

このとき  $y = f(x)$  のグラフと  $y = g(x)$  のグラフが  $x > 0$  において共有点をちょうど 3 つ持つような  $a$  をすべて求めよ。

# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

### 第 3 問

A, B の 2 人がいる。投げたとき表裏の出る確率がそれぞれ  $\frac{1}{2}$  のコインが 1 枚あり、最初は A がそのコインを持っている。次の操作を繰り返す。

- (i) A がコインを持っているときは、コインを投げ、表が出れば A に 1 点を与え、コインは A がそのまま持つ。裏が出れば、両者に点を与えず、A はコインを B に渡す。
- (ii) B がコインを持っているときは、コインを投げ、表が出れば B に 1 点を与え、コインは B がそのまま持つ。裏が出れば、両者に点を与えず、B はコインを A に渡す。

そして A, B のいずれかが 2 点を獲得した時点で、2 点を獲得した方の勝利とする。たとえば、コインが表, 裏, 表, 表と出た場合、この時点で A は 1 点, B は 2 点を獲得しているので B の勝利となる。

- (1) A, B あわせてちょうど  $n$  回コインを投げ終えたときに A の勝利となる確率  $p(n)$  を求めよ。
- (2)  $\sum_{n=1}^{\infty} p(n)$  を求めよ。



# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 4 問

$\triangle ABC$  において  $\angle BAC = 90^\circ$ ,  $|\overrightarrow{AB}| = 1$ ,  $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{3}$  とする。 $\triangle ABC$  の内部の点  $P$  が

$$\frac{\overrightarrow{PA}}{|\overrightarrow{PA}|} + \frac{\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PB}|} + \frac{\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PC}|} = \vec{0}$$

を満たすとする。

- (1)  $\angle APB$ ,  $\angle APC$  を求めよ。
- (2)  $|\overrightarrow{PA}|$ ,  $|\overrightarrow{PB}|$ ,  $|\overrightarrow{PC}|$  を求めよ。

# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

## 第 5 問

次の命題 P を証明したい。

命題 P 次の条件 (a), (b) をともに満たす自然数 (1 以上の整数)  $A$  が存在する。

(a)  $A$  は連続する 3 つの自然数の積である。

(b)  $A$  を 10 進法で表したとき, 1 が連続して 99 回以上現れるところがある。

以下の問いに答えよ。

(1)  $y$  を自然数とする。このとき不等式

$$x^3 + 3yx^2 < (x + y - 1)(x + y)(x + y + 1) < x^3 + (3y + 1)x^2$$

が成り立つような正の実数  $x$  の範囲を求めよ。

(2) 命題 P を証明せよ。

# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 6 問

座標空間において、 $xy$  平面内で不等式  $|x| \leq 1$ ,  $|y| \leq 1$  により定まる正方形  $S$  の 4 つの頂点を  $A(-1, 1, 0)$ ,  $B(1, 1, 0)$ ,  $C(1, -1, 0)$ ,  $D(-1, -1, 0)$  とする。正方形  $S$  を、直線  $BD$  を軸として回転させてできる立体を  $V_1$ , 直線  $AC$  を軸として回転させてできる立体を  $V_2$  とする。

- (1)  $0 \leq t < 1$  を満たす実数  $t$  に対し、平面  $x = t$  による  $V_1$  の切り口の面積を求めよ。
- (2)  $V_1$  と  $V_2$  の共通部分の体積を求めよ。

# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)



# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)